Kryssprodukt - någonting annat än bara en formel för gymnasiestuderanden

Johnny Blomqvist

13 december 2016

HELSINGIN YLIOPISTO — HELSINGFORS UNIVERSITET — UNIVERSITY OF HELSINKI

Tiedekunta/Osasto — Fakultet/Sektion — Faculty

Matematisk-Naturvetenskapliga

Laitos — Institution — Department

Institutionen för matematik och statistik

Tekijä — Författare — Author

Johnny Blomqvist

Työn nimi — Arbetets titel — Title

Kryssprodukt - någonting annat än bara en formel för gymnasiestuderanden

Oppiaine — Läroämne — Subject

Matematik

Työn laji — Arbetets art — Level	Aika — Datum — Month and year	Sivumäärä — Sidoantal — Number of pages
Pro gradu -avhandling	December 2016	66 s.

Tiivistelmä — Referat — Abstract

Syftet med den här Pro gradu-avhandlingen är att presentera ett sätt för gymnasiestuderanden att lära sig kryssprodukten så att det är motiverat. Orsaken bakom avhandlingen är att kryssprodukten har haft en marginell roll i den finländska gymnasieundervisningen. Den här rollen har granskats i den här avhandlingen utgående från läroplaner och läroböcker i Finland från 70-talet till den läroplan och de läroböcker vi har idag. De centrala iakttagelserna från granskningen är att kryssprodukten har varit ett tilläggsmaterial i läroplanerna och att läroböckerna presenterat kryssprodukten som en formel utan motiveringar.

Intresset för kryssprodukten ligger i att den tillämpas i gymnasiefysiken och är ett användbart verktyg för bland annat plan i rummet i matematiken. Den konstruktivistiska inlärningsmetoden som varit närvarande i lärarutbildningen handlar om att den studeranden ska bygga upp ny kunskap utgående från tidigare erhållen kunskap. Den här inlärningsmetoden tillämpas inte då kryssprodukten presenteras som en omotiverad räkneformel och därmed leder det till en dålig förståelse.

För att motivera kryssprodukten presenteras en härledning som baserar sig på sådant som torde vara bekant för en studerande som läst vektorkursen i gymnasiet. Härledningen startar från arean av parallellogrammer som är uppspända av två planvektorer och slutar med en metod för att beräkna arean av parallellogrammer som är uppspända av rumsvektorer i komponentform. Den här metoden identifieras som kryssprodukten.

Härledningen av kryssprodukten är omformat till ett undervisningspaket. Undervisningspaketets ändamål är att låta studeranden aktivt jobba fram den kunskapen som paketet vill förmedla. Strukturen för undervisningspaketet är likadan som för härledningen, med den skillnaden att en del av informationen är inbakat i övningsuppgifter för att aktivera studeranden. Då övningsuppgifterna innehåller viktig information för helheten är modellösningar också presenterade i avhandlingen.

Undervisningspaketet kan vara för omfattande för att läggas till i ett tryckt läromedel men det skulle finnas potential att bifoga det till ett elektroniskt läromedel. Då uppgifter kommer efterhand i paketet skulle det finnas behov av ett interaktivt läromedel som skulle kräva en lösning efter vilket modellösningen skulle komma fram.

Avainsanat — Nyckelord — Keywords

Kryssprodukt, vektorprodukt, undervisningspaket, parallellogram

Säilytyspaikka — Förvaringsställe — Where deposited

Campusbibliotek i Gumtäkt

Muita tietoja — Övriga uppgifter — Additional information

Innehåll

1 Inledning **5**

2 Inlärning och undervisning av kryssprodukten **7**

2.1 Konstruktivism för bättre förstående . . . 7

2.2 Kryssprodukten i gymnasier i Finland . . . 9

2.2.1 Kryssprodukten i läroplaner . . . 9

2.2.2 Kryssprodukten i finländska läroböcker . . . 9

2.2.3 Sammanfattning av böckerna . . . 17

3 Härledning av kryssprodukten **19**

3.1 Egenskaper för vektorer . . . 19

3.1.1 Enhetsvektorer med högerhandsregeln . . . 19

3.1.2 Vinkeln mellan två vektorer . . . 20

3.1.3 Vektorprojektion . . . 20

3.2 Arean av en parallellogram i planet . . . 21

3.2.1 Flyttningsregeln för koefficienter i planet . . . 23

3.2.2 Vektordistributivitet i planet . . . 23

3.2.3 Kommutativitet i planet . . . 24

3.2.4 Motvektorer i planet . . . 25

3.2.5 Enhetsvektorer i planet . . . 25

3.2.6 Arean för alla parallellogrammer i planet . . . 26

3.3 Arean av en parallellogram i rummet . . . 27

3.3.1 Motexempel för att vektordistributivitet inte gäller i rummet . . . 27

3.3.2 Areaberäkning för parallellogrammer i rummet . . . 28

3.3.3 Härledning av areavektorn via ett prisma och vektordistributiviteten 31

3.3.4 Flyttningsregeln för koefficienter i rummet . . . 33

3.3.5 Kommutativitet i rummet . . . 33

3.3.6 Motvektorer i rummet . . . 34

3.3.7 Arean för alla parallellogrammer i rummet . . . 35

3.3.8 Kryssprodukten 36

4 Undervisningspaket 38
4.1 Enhetsvektorer och högerhandsregeln 38
4.2 Vinkeln mellan två vektorer 39
4.3 Vektorprojektion 40
4.4 Normalplan 42
4.5 Area av en parallellogram i planet 42
4.6 Areaberäkning för parallellogrammer i rummet 46
4.7 Kryssprodukten 53

5 Modellösningar och svar 54

6 Diskussion och slutsatser 62

Figurer

3.1 Koordinataxlarna och vektorerna $\vec{i}, \vec{j}$ och $\vec{k}$ i rummet. 20
3.2 Indelning av vektorn $\vec{a}$ i komponenterna $\vec{a_1}$ och $\vec{a_2}$. 21
3.3 Projicering av vektorn $\vec{a}$ på vektorn $\vec{b}$ ger projektionsvektorn $\vec{a_1}$. 21
3.4 Projicering av vektorn $\vec{a}$ på planet α som ger projektionsvektorn $\vec{a_1}$. . . . 21
3.5 Parallellogrammen ABCD som spänns upp av vektorerna $\vec{a}$ och $\vec{b}$. 22
3.6 Tre parallellogrammer med inritade höjder. 23
3.7 Vektorn -$\vec{a}$ placerad att börja från samma punkt som $\vec{a}$ och $\vec{b}$. 25
3.8 Normalvektorn som bildas då parallellogrammen spänns upp av $\vec{i}$ och $\vec{j}$. . . 28
3.9 Enhetsvektorerna presenterade från ur synvinklar. 29
3.10 Parallellogram som spänns upp av vektorerna $a\vec{i}$ och $b\vec{j} + c\vec{i}$. 30
3.11 Ett prisma som spänns upp av rumsvektorerna $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ och $\vec{d}$. 31
3.12 Projektionsvektorerna $\vec{b}', \vec{c}'$ och $\vec{d}'$ på normalplanet α i samma prisma som i figur 3.11. 32

4.1 Koordinataxlarna och vektorerna $\vec{i}, \vec{j}$ och $\vec{k}$ i rummet. 39
4.2 Indelning av vektorn $\vec{a}$ i komponenterna $\vec{a_1}$ och $\vec{a_2}$. 40
4.3 Projicering av vektorn $\vec{a}$ på $\vec{b}$. 41
4.4 Projicering av vektorn $\vec{a}$ på planet α. 41
4.5 Tre vektorer som ligger i normalplanet α till vektorn $\vec{a}$. 42
4.6 Parallellogrammen ABCD som spänns upp av vektorerna $\vec{a}$ och $\vec{b}$. 42
4.7 Paralellogrammerna som spänns upp av $\vec{a}$ och $\vec{b}$, av $\vec{a}$ och $\vec{c}$ och av $\vec{a}$ och $\vec{b} + \vec{c}$ 44
4.8 Två plan som skär varandra i rummet. 46
4.9 Två normaler till ett plan. 46
4.10 Normalvektorn som bildas då parallellogrammen spänns upp av $\vec{i}$ och $\vec{j}$. . . 47
4.11 Enhetsvektorerna presenterade ur olika synvinklar. 48
4.12 Parallellogram som spänns upp av vektorerna $a\vec{i}$ och $b\vec{j} + c\vec{i}$. 48
4.13 Ett prisma som spänns upp av rumsvektorerna $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ och $\vec{d}$. 50
4.14 Projektionsvektorerna $\vec{b}', \vec{c}'$ och $\vec{d}'$ på normalplanet α i samma prisma som i figur 4.13 50

Kapitel 1

Inledning

Kryssprodukten är en produkt av vektorer och hör till vektorläran. Då man jämför med produkten av två skalärer eller med punktprodukten för vektorer är kryssprodukten speciell. Kryssprodukten är inte en skalär, utan en vektor med bestämda egenskaper. Man beräknar kryssprodukten av två vektorer och den erhållna vektorn är vinkelrät mot de här båda. Längden hos kryssprodukten är samma som arean för en parallellogram vars sidor är vektorerna för vilka kryssprodukten beräknas.

I den finländska gymnasieundervisningen har kryssprodukten haft en liten roll och denna roll blir allt mindre. De här slutsatserna kan man dra utifrån läroplaner och läroböcker från 70-talet till den läroplan och de läroböcker vi har idag. Man kan generellt säga att kryssprodukten har behandlats utan motiveringar, endast som en formel, i gymnasieundervisningen de senaste 40 åren. För att undervisningen ska leda till att studeranden förstår, bör man som lärare sträva efter att det man undervisar är motiverat, med inget undantag för kryssprodukten. Orsaken till att kryssprodukten har en så liten roll är att vektorläran inte har så stor roll i gymnasieundervisningen. I läroplanen 2015 [25] behandlas vektorer i en kurs i långa matematiken och den mängd förkunskap som kryssprodukten kräver ryms knappt i kursen. Därför blir kryssprodukten lätt utanför.

Kryssprodukten är ett användbart redskap vid matematiken och fysiken. Till exempel definieras kraftmomentet med hjälp av kryssprodukten och rörelseekvationen för en laddad partikel i ett magnetfält innehåller också kryssprodukten. De här hör till gymnasiefysiken och inlärningen av dessa områden kan halta ifall man inte förstår kryssprodukten.

Syftet med den här avhandlingen är en presentation som motiverar för gymnasiestuderande att lära sig kryssprodukten. Det centrala är en härledning av kryssprodukten och ett undervisningspaket som baserar sig på härledningen. Undervisningspaketet strävar efter att motivera alla steg och låter studerande med egen aktivitet komma fram till en del av den nya informationen. Härledningsprocessen och därmed också undervisningspaketet börjar från arean av en parallellogram.

Avhandlingen inleds med att motivera varför det finns behov att göra ett undervisningspaket om kryssprodukten. Till det här kapitlet hör en kort presentation om hur man ska undervisa för att det ska leda till bra förståelse och en forskning kring hur kryssprodukten behandlats i undervisningen. Forskningen är gjord utgående från vad som är sagt om kryssprodukten i läroplaner och hur läroböcker har behandlat ämnet. Efter motiveringen kommer härledningen av kryssprodukten som är grunden för undervisningspaketet som följer. För uppgifterna i undervisningspaketet är det gjort ett kapitel med modellösningar och svar som tillsammans med undervisningspaketet bildar en egen helhet. Avhandlingen slutar med tankar kring utvecklingsmöjligheter.

Kapitel 2

Inlärning och undervisning av kryssprodukten

2.1 Konstruktivism för bättre förstående

I läroplanen 2015 [25] konstateras att lärandet är ett resultat av aktivt och självstyrt arbete samt att de tidigare erfarenheterna och kunskaperna fördjupar kompetensen och bygger ny kunskap. Inom pedagogiken är konstruktivism en inlärningsmetod som bygger på att studeranden lär sig något nytt genom att bygga vidare på tidigare erhållen kunskap. Leino [13] konstaterar att Piagets konstruktivistiska teorier har behandlats i lärarutbildningen under de senaste 30 åren. Teorin handlar om att människans tankar och förståelse utvecklas i etapper. Leino [13] hänvisar också till sitt tidigare verk där han sagt att läraren har tagit till sig konstruktivismen.

Vid sidan om konstruktivismen är också studerandes roll viktig i uppbyggande av den egna nya kunskapen [13]. Det finns forskningsresultat som stöder den konstruktivistiska inlärningsmetoden, det vill säga att tidigare erhållen kunskap har en viktig roll då studerande ska lära sig något nytt [13]. Läraren ska alltså sträva efter att bygga upp en sådan väg för studerande så att de kan använda tidigare erhållen kunskap för att bygga upp ny kunskap. För att det ska vara möjligt bör läraren känna till studerandenas kunskaper. Ifall inte ett längre kontinuerligt arbete har gjorts med samma studerande, måste läraren utnyttja sin erfarenhet och utgå från de kurser studerandena har utfört för att få en bild av studerandenas kunskapsnivå. Leino [13] konstaterar att en central sak i lärarens undervisningsarbete är att utnyttja studerandes kunnande och att bygga upp undervisningen så att de kunskaperna används.

Utifrån konstruktivismen och Piagets teorier förstår eleverna bättre ett matematiskt fenomen genom att med hjälp av egen kunskap förklara ett fenomen[13]. Det här om man jämför med att läraren endast skulle säga hur saken är [13]. Leino [13] säger också att den information som studeranden själv kommer fram till leder till en annorlunda inlärning än om informationen presenteras som ett färdigt paket. Ur en konstruktivistisk synvinkel bör man inom matematiken undvika att presentera information, förutsatt att det inte är motiverat, för att eleven ska få en djupare förståelse. Pehkonen [16] säger att matematisk förståelse svarar på frågan ”Varför?”. Att förstå och att veta varför hör till den konceptuella kunskapen [3].

Lenni Haapasalo skriver i sin artikel [3] med rubriken ”Måste man förstå för att kunna göra eller måste man kunna göra för att förstå?”, om problemet mellan den konceptuella och procedurella kunskapen i pedagogiskt syfte. Vid polarisering av kunskap i konceptuell och procedurell är den förstnämnde förknippad med förståelse och den andra med utförande [3]. Problemet mellan de här i undervisningen kan man redan tolka från Haapasalos rubrik och ligger i att vad man ska lära sig först för att undervisningen ska vara effektiv. Haapasalo [3] räknar upp flera olika begrepp av polariseringar i litteraturen med vilket han visar att bekymret har diskuterats rätt mycket. Det finns olika synpunkter på hur den konceptuella och den procedurella kunskapen är beroende av varandra, men ingen säkerhet på att vilkendera som är mest fördelaktig att börja med vid inlärning [3].

Haapasalo [3] påstår att den procedurella kunskapen utvecklas snabbare än den konceptuella kunskapen då människan utvecklas. Han syftar på att ett barn ofta väljer rätt sätt, utan att veta varför. I matematiken flyter de olika kunskaperna ofta in i varandra och enligt Haapasalo [3] är begreppet *procept* det svåraste men samtidigt mest fascinerande hos matematiska begrepp. Som namnet antyder är det en blandning av de två olika kunskaperna och innehåller därmed både mentala objekt som processerna förknippade med dem. När man analyserar matematiska inlärningsprocesser anser Haapasalo att just denna *procept*, blandningen, är en bland de viktigaste aspekterna. Han avslutar sin artikel med att ganska vågat säga bland annat att ”Det viktigaste är inte att göra, utan förstå vad, hur och varför jag gör”. Man ska räkna och följa stegen i processen, men samtidigt veta varför man använde metoden och vad både utgångsläget, slutläget och svaret betyder.

Att förstå är ett mycket vidsträckt begrepp. Pehkonen [16] jämför individens förmåga att förstå med en oändlig trappa. Man kan alltid se på en sak man förstår från en ny synvinkel och därför kan det mänskliga förstående bara vara delvist [16]. Begreppet förstå används i det är arbetet i syftet, att förstå bättre. Det finns forskningar som bevisar att för många studerande handlar matematiken endast om jobbande med symboler utan betydelse [16]. Det här förknippar Pehkonen [16] med dålig förståelse. Han skriver också om att förståelsen har en inverkan på lärandet. Matematiken är inte endast räknande utan i undervisningen pratas det mycket om att öka på mängden man förstår, men det är en långsam process som kräver mycket arbete [16]. Räknande och förstående är dock inte varandra uteslutande, utan för båda bör det ägnas ett stort arbete [16].

2.2 Kryssprodukten i gymnasier i Finland

C.G. Wolff inleder sin lärobok, *Lukion vektorilaskenta ja geometria 1* [27], för gymnasier år 1966 med att förutspå att vektorerna ska få en allt större roll i matematiken i de nordiska skolsystemen. Enligt Jokinen [5] togs vektorerna med i undervisningen i Finland efter grundskolereformen på 70-talet, och då fanns vektorerna i både slutet av grundskolan och i gymnasiet. Kryssprodukten hör till vektorläran och har endast behandlats i gymnasiets långa lärokurser [5]. I följande stycke analyserar jag hur kryssprodukten uppmärksammas i de finska läroplanerna från 1973 till 2015.

2.2.1 Kryssprodukten i läroplaner

Kryssprodukten har inte haft en stor roll i någon gymnasiekurs. I läroplanen 1973 nämns kryssprodukten som ett avsnitt som kan behandlas ifall det finns tid och möjlighet. Den finns i en fördjupande och kompletterande helhet med tredimensionella vektorer, komplexa tal och repetition av differential och integralkalkyl. Enligt läroplanen 1981 [9] undervisas vektorer i två kurser, kurs 3 och kurs 10. Kurs 10 är en blandkurs med komplettering av vektorlära, rumsgeometri och komplexa tal. I kursbeskrivningen föreslås det att kryssprodukten endast presenteras. Läroplanen 1985 [22] har en likadan fördelning av kurserna och där är kryssprodukten tillsammans med den skalära trippelprodukten märkta med två stjärnor. Det här betyder att det kan behandlas vid intresse och om tiden räcker till.

Vektorernas roll i gymnasiet minskade i samband med gymnasiets läroplan 1994 [23]. Vektorerna undervisades endast i en delad kurs tillsammans med trigonometrin, i den långa lärokursen. Kursbeskrivningen är mycket kortfattad och kryssprodukten nämns inte. I läroplanen 1994 [23] står det att eleven ska öva sig på att använda flerdimensionella vektorer i olika sammanhang. I det sammanhanget kunde eventuellt kryssprodukten ingå. I grunden för läroplanen 2003 [24] och 2015 [25] nämns inte kryssprodukten. I de här läroplanerna är vektorerna en hel kurs där räta linjer och plan i rummet nämns som centrala innehåll. I kursens mål i båda läroplanerna nämns att studerande ska med hjälp av vektorer kunna undersöka geometriska figurers egenskaper. Målen och de centrala innehållen stöder, men kräver inte inlärningen av kryssprodukten.

2.2.2 Kryssprodukten i finländska läroböcker

Böckerna som analyseras i det här avsnittet ska uppfylla några kriterier. Böckerna ska vara ämnade för den långa/omfattande lärokursen i matematik och grunda sig på någon läroplan som jag nämnde i det föregående avsnittet. Det här med undantag för läroplanen 2015, eftersom läroböckerna inte ännu publicerats då avhandlingen är skriven. De åren då vektorerna var uppdelade i två olika kurser granskas endast den senare, eftersom kryssprodukten hör till den kursen.

I det här avsnittet ger jag en översikt över hur kryssprodukten behandlas i läroböckerna för respektive läroplan. Den primära granskningen i alla läroböcker görs via innehållsförteckningen. Analyseringen följer en kronologisk ordning och börjar med böcker som är ämnade för läroplanen 1973. Jag kommer att gå igenom hur böckerna behandlar kryssprodukten samt sammanfatta kort iakttagelserna efteråt där jag även hänvisar tankar från avsnitt 2.1. Det räcker att läsa sammanfattningen för att förstå arbetet.

C.G. Wolff presenterar kryssprodukten i andra boken i serien, *Lukion vektorilaskenta ja geometria 2* [28]. Då den här serien är gjord för gymnasier före vektorerna var med i läroplanen kan den tolkas som ett av utgångslägena för vektorundervisningen i Finland och därmed presenteras den här bokens syn på kryssprodukten. Wolff härleder kryssprodukten med att bestämma en vektor som är vinkelrät mot två godtyckliga vektorer i rummet i komponentform. Det här görs med hjälp av punktprodukten och härledningen presenteras med determinanter.

Kryssprodukten har några egenskaper som visar sig vara viktiga. Ifall vi antar att $\vec{u}$, $\vec{v}$ och $\vec{w}$ är godtyckliga vektorer i rummet, och att k och l är positiva reella tal, så kan egenskaperna skrivas som

$$\vec{u} \times \vec{u} = \vec{0}, \tag{2.1}$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u}), \tag{2.2}$$

$$\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w} \tag{2.3}$$

och

$$k\vec{u} \times l\vec{v} = kl(\vec{u} \times \vec{v}). \tag{2.4}$$

Wolff[28] bevisar egenskaper 2.1, 2.2 och 2.3 och låter läsaren bevisa egenskapen 2.4. Med hjälp av ett ofta använt lemma, nämligen Lagranges identitet för det tredimensionella rummet,$|\vec{u} \times \vec{v}|^2 = (|\vec{u}||\vec{v}|)^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2$, ska läsaren härleda ett uttryck för kryssproduktens längd. Kryssproduktens längd och absolutbeloppet av kryssprodukten är samma sak. Uttrycket som läsaren har härlett omarbetar Wolff till uttrycket

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}| \sin \sphericalangle(\vec{u}, \vec{v}), \tag{2.5}$$

för längden av kryssprodukten, där $\sphericalangle(\vec{u}, \vec{v})$ är vinkeln mellan vektorerna $\vec{u}$ och $\vec{v}$. Wolff förknippar inte kryssprodukten med arean av parallellogrammer och presenterar inte kryssprodukten med det som kallas definitionen för kryssprodukten i den här avhandlingen. Definitionen för kryssprodukten är

$$\vec{u} \times \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \sin \sphericalangle(\vec{u}, \vec{v})\vec{n}, \tag{2.6}$$

där $\vec{u}$ och $\vec{v}$ är godtyckliga vektorer i rummet och $\vec{n}$ är en enhetsvektor som är vinkelrät mot vektorerna $\vec{u}$ och $\vec{v}$. Enhetsvektorn $\vec{n}$ ska även bilda ett högerhandssystem med vektorerna $\vec{u}$ och $\vec{v}$. Högerhandssystem presenteras senare i avhandlingen.

Böcker som baserar sig på läroplanen 1973

I läroplanen 1973 nämns kryssprodukten som ett fördjupat innehåll[21]. De böcker som granskas här är *Matematiikkaa. 12, Pitkä kurssi* av Oinas-Kukkonen, Merikoski, Niva och Keranto [15], läroboken *matematiikka 12, lukion laajempi kurssi* av Lehtosaari och Leino [11] samt *Lukion matematiikka 3, pitkä kurssi* av Apajalahti, Laine och Tanskanen [1].

I boken av Oinas-Kukkonen m.fl. nämns inte kryssprodukten i innehållsförteckningen, men ett rätt omfattande avsnitt hittar man under rubriken ”Vektorialgebran jatkoa”= (Fortsättning av vektoralgebra). Författarna börjar avsnittet med en inledande text där de bland annat hävdar att kryssprodukten är en av de räkneoperationer som gör vektoralgebran viktig. Författarna inleder stycket om kryssprodukten med en geometrisk definition, vilken jag identifierar som kryssproduktens definition(2.6). Egenskapen 2.1 blir nämnd i den geometriska definitionen. Författarna använder definitionen 2.6 i exempeluppgiften där kryssprodukten av enhetsvektorerna $\vec{i}$ och $\vec{j}$ räknas. Ytterligare beräknas kryssprodukten för alla möjliga enhetsvektorpar av $\vec{i}, \vec{j}$ och $\vec{k}$. Med bild och uträkning motiveras att längden av kryssprodukten av två vektorer är samma som arean av en parallellogram med samma två vektorerna som närliggande sidor. Efter det här stycket i boken kommer en samling av kryssproduktens egenskaper(2.2, 2.3 och 2.4), som Oinas-Kukkonen m.fl. kallar för räkneregler och resultat. Egenskaperna används i ett exempel där man ska bestämma arean av en parallellogram vars närliggande sidor är vektorer uttryckta i komponentform. Exemplet fungerar som stöd då författarna bestämmer kryssprodukten för godtyckliga vektorer i komponentform. För de godtyckliga vektorerna $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ och $\vec{v} = d\vec{i} + e\vec{j} + f\vec{k}$ är kryssprodukten

$$\vec{u} \times \vec{v} = (bf - ce)\vec{i} + (cd - af)\vec{j} + (ae - bd)\vec{k}, \tag{2.7}$$

där a, b, c, d, e och f är vilka som helst reella tal. Den här framställningen kan skrivas med tvåradiga determinanter för koefficienterna,

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} c & a \\ f & d \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a & b \\ b & e \end{vmatrix} \vec{k}, \tag{2.8}$$

eller som en treradig determinant,

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix}. \tag{2.9}$$

Oinas-Kukkonen m.fl. gör ingen härledning för 2.7, 2.8 och 2.9 och kallar en sammanställning av de här för kryssproduktens algebraiska framställning. Den här framställningen övas med en exempeluppgift där man ska bestämma de enhetsvektorer som är vinkelräta mot två givna vektorer. [15]

Lehtosaari och Leino börjar avsnittet om kryssprodukten med definitionen (2.6). Utgående från vinkeln mellan vektorerna och vinkelns sinusvärde ger författarna absolutbeloppet av kryssprodukten(2.5) och konstaterar att det är arean för parallellogrammen som vektorerna spänner upp. De hänvisar till en bild av situationen. Härnäst följer kryssproduktens egenskaper. Lehtosaari och Leino bevisar egenskaperna 2.1, 2.2, 2.3 och 2.4 och ger egenskapen

$$(\vec{u}+\vec{v})\times\vec{w}=\vec{u}\times\vec{w}+\vec{v}\times\vec{w} \tag{2.10}$$

åt läsaren att härleda som övningsuppgift utgående från egenskapen 2.4. Övningsuppgifterna som följer ger övning i att både använda definitionen och de egenskaper som härletts. Författarna har valt att presentera ett utförligt avsnitt om determinanten före avsnittet där de behandlar hur kryssprodukten beräknas för vektorer givet i komponentform. Avsnittet börjar med en genomgång av kryssprodukten som bildas av enhetsvektorerna $\vec{i}, \vec{j}$ och $\vec{k}$. Enhetsvektorerna ingick redan i en övningsuppgift och därför är de bara uppräknande. Med de härledda egenskaperna och kryssprodukten av enhetsvektorerna $\vec{i}, \vec{j}$ och $\vec{k}$ förenklas kryssprodukten för två godtyckliga vektorer i komponentform så långt som möjligt. Resultatet som fås är samma som i framställningen 2.7 som sedan skrivs om med tvåradiga determinanter(2.8) och som en treradig determinant(2.9). Att räkna kryssprodukten med hjälp av en determinant övas i ett liknande exempel som i boken i föregående stycke. [11]

Kryssprodukten i *Lukion matematiikka 3, pitkä kurssi* av Apajalahti, Laine och Tanskanen börjar också med definition(2.6) och bild. Även här konstateras, utgående från vinkeln samt sinusvärdet för vinkeln, att absolutbeloppet av kryssprodukten har formen 2.5. Det sägs inget ännu om sambandet med parallellogrammer, vilket kommer först efter att kryssproduktens egenskaper(2.2, 2.3 och 2.4) räknats upp samt bevisats. Egenskapen 2.1 sägs följa direkt ur definitionen. Parallellogrammen kommer in som kryssproduktens geometriska betydelse, där arean för en parallellogram som spänns upp av två vektorer bestäms. Härefter konstateras att arean är samma som absolutbeloppet av kryssprodukten av de två vektorerna i fråga. Det här presenteras kort och följs av kryssprodukten för vektorer i komponentform. Författarna börjar med att räkna upp kryssprodukterna av enhetsvektorerna $\vec{i}, \vec{j}$ och $\vec{k}$ för att sedan övergå till att räkna kryssprodukten för två godtyckliga vektorer i komponentform. *Lukion matematiikka 3, pitkä kurssi* behandlar uträkningarna utförligt genom att förklara vilken av egenskaperna som används i alla steg. Efter att ha sammanfattat resultatet(2.7) konstaterar författarna att det är lättare att komma ihåg resultatet med hjälp av determinanter. En kort allmän beskrivning av determinanten görs innan det tidigare resultatet presenteras i determinantform(2.8 och 2.9). Det här övas genom att bestämma kryssprodukten av två vektorer i komponentform i en exempeluppgift.[1]

Böcker baserar sig på läroplanen 1981

Utifrån läroplanen 1981 [9] kan man konstatera att kryssprodukten ska höra till kurs 10, men kryssprodukten ska inte behandlas ingående. Böckerna som baserar sig på den här läroplanen är *Uuden lukion matematiikka 3, Laaja oppimäärä* av Miinala, Salimäki och Vuorinen [14], *Lukion matematiikka. Kurssit 9-11, Laaja oppimäärä* av Apajalahti, Laine och Tanskanen [2] samt *Laaja matematiikka. 3, Kurssit 9-11* av Lehtosaari, Leino och Norlamo [12].

Miinala, Salimäki och Vuorinen har ett tillvägagångssätt som liknar Wolffs [28] presentation av kryssprodukten och därmed skiljer sig sättet avsevärt från de andra läroböckerna. De utgår ifrån två olikriktade vektorer i komponentform, och med hjälp av punktprodukten gör de ett ekvationssystem för att bestämma en vektor som är vinkelrät mot de två vektorerna. Den vektor som erhålls(2.7) kallar författarna för kryssprodukten. Det här övas med en exempeluppgift där man ska bestämma en enhetsvektor som är vinkelrät mot ett plan. Två vektorer som löper i planet är givna. Determinanten behandlas, efter vilket kryssproduktens formel skrivs om till en treradig determinant(2.9) via framställningen med tvåradiga determinanter för koefficienterna(2.8). Att bestämma kryssprodukten med determinant övas i en exempeluppgift. Miinala, Salimäki och Vuorinen presenterar därefter en tabell ur vilket man kan läsa kryssprodukten av alla möjliga enhetsvektorpar av $\vec{i}, \vec{j}$ och $\vec{k}$, varpå de räknar upp egenskaperna 2.1, 2.2, 2.3 och 2.4 hos kryssprodukten utan bevis. Egenskaperna används i en exempeluppgift. Den geometriska tolkningen börjar med att författarna konstaterar att ekvationen $|\vec{a} \times \vec{b}|^2 + |\vec{a} \cdot \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2$ stämmer. Efter det härleds absolutbeloppet av kryssprodukten till sådan form(2.5) vi är vana med. Bland annat konstateras då att det är arean av parallellogrammen som spänns upp av vektorerna i kryssprodukten. Inte förrän här kommer definitionen för kryssprodukten med och det som gör den här definitionen speciell är att formeln $\vec{u} \times \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \sin \sphericalangle(\vec{u}, \vec{v})\vec{n}$ inte är given. Författarna kallar definitionen för den geometriska definitionen och i den ingår att längden av kryssprodukten är den uppspända parallellogrammens area och att kryssprodukten bildar ett högerhandssystem med de två vektorerna av vilka kryssprodukten bestäms. Det som definitionen säger övas med ett exempel där man ska räkna arean för en triangel, då man vet koordinaterna för hörnpunkterna. Exemplet löses med hjälp av determinanter. [14]

Apajalahti, Laine och Tanskanen har kopierat största delen av behandlingen av kryssprodukten från sina tidigare verk. De har tagit bort bevisen för egenskaperna 2.2, 2.3 och 2.4 och de själva egenskaperna står inte ut ur texten. Då Apajalahti, Laine och Tanskanen beräknar kryssprodukten för godtyckliga vektorer i komponentform hänvisar de till numrerade egenskaper hos kryssprodukten. Egenskaperna är inte numrerade i upplagan.[2]

I avsnittet om kryssprodukten i boken av Lehtosaari, Leino och Norlamo [12] kan man se direkta likheter med avsnittet i den tidigare boken av Lehtosaari och Leino [11]. Även här är avsnittet förkortat. Det som fallit bort är bevisen för kryssproduktens egenskaper(2.1, 2.2, 2.3 och 2.4), och den del i vilken man behandlar kryssprodukten för vektorer i komponentform. I själva avsnittet om kryssprodukten nämns att härledningen för kryssprodukten av vektorer i komponentform är arbetsdrygt, men lätt att beräkna. I avsnittet räknar man också upp kryssprodukten av enhetsvektorerna $\vec{i}, \vec{j}$ och $\vec{k}$. Hur man ska använda kryssproduktens egenskaper och kryssprodukten av enhetsvektorerna $\vec{i}, \vec{j}$ och $\vec{k}$ demonstreras i två exempeluppgifter. Följande avsnitt, om trippelprodukten, är märkt som fördjupat material. I samband med trippelprodukten presenteras determinanten vilket leder till räknandet av kryssprodukten av godtyckliga vektorer i komponentform. Resultatet(2.7) skrivs sedan om med determinanter och presenteras i två satser. Den första satsen har koefficienterna i tvåradiga determinanter(2.8) och i den andra är kryssprodukten skriven som en treradig determinant(2.9). Ett exempel där man ska bestämma en enhetsvektor som är vinkelrät mot två vektorer i komponentform följer. Lehtosaari, Leino och Norlamo anser att kryssproduktens beräknande med determinanten är fördjupat material som man kan behandla om det finns tid och intresse. [12]

Böcker som baserar sig på läroplanen 1985

Kryssprodukten noteras i läroplanen 1985 [22] som fördjupat material. I båda böckerna som utgår från den här läroplanen är avsnittet om kryssprodukten fördjupat material. Böckerna är *Lukion laaja matemtiikka. Kurssit 9-11* av Rajala och Vire[20] och *Alfa. Lukion laajan matemtiikan kurssit 9-11* av Lahti och Leino [10].

I läroboken av Rajala och Vire börjar avsnittet om kryssprodukten med en definition. De använder sig inte av enhetsvektorn, $\vec{n}$ som ger riktningen för kryssprodukten i definitionen 2.6. I stället ger de kryssproduktens absolutbelopp(2.5) och nämner att vektorerna samt deras kryssprodukt ska bilda ett högerhandssystem. De fortsätter med att räkna upp kryssproduktens egenskaper(2.1, 2.2, 2.3, 2.4 och 2.10) och demonstrerar hur egenskaperna används i ett exempel. Egenskaperna bevisas inte, utan det sägs att de följer från definitionen. Den geometriska tolkningen fås genom att författarna hävdar att kryssproduktens absolutbelopp anger arean för parallellogrammen vars två vektorer är de som beräknas i kryssprodukten. Sambandet mellan kryssproduktens absolutbelopp och arean av parallellogrammen bevisas. Kryssprodukten av enhetsvektorerna $\vec{i}, \vec{j}$ och $\vec{k}$ räknas upp i ett exempel. Rajala och Vire fortsätter med att förenkla kryssprodukten av två godtyckliga vektorer i komponentform med hjälp av de uppräknade egenskaperna och kryssprodukten av enhetsvektorerna $\vec{i}, \vec{j}$ och $\vec{k}$. För att komma ihåg resultatet sätts enhetsvektorerna $\vec{i}, \vec{j}$ och $\vec{k}$, och koefficienterna i en treradig determinant(2.9). Hur man räknar med determinanten visas allmänt, efter vilket författarna presenterar några exempel på beräknande av kryssprodukten med hjälp av determinanten. [20]

Kapitlet om kryssprodukten i Lahti och Laines bok inleds med en kort konstruktion av produkten. De börjar med två godtyckliga olikriktade vektorer som placeras så att de börjar från samma punkt. Konstruktionen fylls ut så att det bildas en parallellogram som har en viss area. Lahti och Laine bildar en tredje vektor vars riktning är vinkelrät mot de två ursprungliga vektorerna och följer ett högerhandssystem. Längden av den tredje vektorn är samma som storleken av parallellogrammen. Den tredje vektorn är då kryssprodukten av de två ursprungliga vektorerna. Efter det kommer en definition som säger samma sak som kraven för den tredje vektorn i konstruktionen. Den här definitionen innehåller inte formeln $\vec{u} \times \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \sin \sphericalangle(\vec{u}, \vec{v})\vec{n}$. I exemplet som följer bestäms kryssprodukten av en vektor som består av komponenterna $\vec{i}$ och $\vec{j}$ och en vektor med endast $\vec{i}$ komponent. Uppgiften löses genom att rita upp parallellogrammen och att konstatera att båda vektorerna ligger i xy-planet. Kryssproduktens egenskaper(2.2, 2.3, 2.4 och 2.10) räknas upp och endast egenskapen att kryssprodukten inte är kommutativ(2.2) motiveras kort. Läsaren förväntas bekanta sig med egenskaperna med hjälp av ett kort exempel. Följande avsnitt behandlar kryssproduktens och skalära trippelproduktens beräknande med determinant. Det här avsnittet är också ett fördjupat material. Lahti och Laine börjar med att kort presentera godtyckliga tvåradiga och treradiga determinanter med ett exempel och räkna upp kryssprodukterna av enhetsvektorerna $\vec{i}, \vec{j}$ och $\vec{k}$. Härefter förenklar de uttrycket för kryssprodukten av två godtyckliga vektorer i komponentform och skriver om resultatet(2.7) med tvåradiga determinanter för koefficienterna(2.8) och slutligen till en treradig determinant(2.9). Allt det här sammanfattas i en ruta där de har både kryssprodukten uttryckt med determinant samt en geometrisk tolkning, vilket är en förkortad version av deras definition tidigare. Avslutningsvis presenteras beräkning med determinanter i några exempel. [10]

Böcker som baserar sig på läroplanen 1994

Kryssprodukten nämndes inte i läroplanen 1994 [23], men man kan konstatera att kursbeskrivningarna överhuvudtaget är kortfattade i ifrågavarande läroplan. Vektorernas roll i gymnasieundervisningen har också minskat radikalt i den här läroplanen. Piippola, Silfverberg och Viilo har gjort valet att helt lämna bort kryssprodukten i sin bok *Matematiikan taito. 4, Trigonometria ja vektorit* [19]. Läroboken *Trigonometri och vektorer. Gymnasiematematik, lång kurs* av Piippola, Silfverberg, Viilo och Burman baserar sig på föregående nämnda finska bok. Den är inte en direkt översättning då den bland annat innehåller kryssprodukten. Den tredje boken som har granskats är *Pyramidi: matematiikan tietokirja. 2* av Kontkanen, Liira, Luosto, Nurmi, Nurmiainen, Ronkainen och Savolainen [7]. Bokserien är uppdelad i faktaböcker och övningsböcker, och jag granskar faktaboken.

Avsnittet om kryssprodukten i boken av Piippola, Silfverberg, Viilo och Burman börjar med en inledningsuppgift. I uppgiften ska man beräkna arean av en triangel och en parallellogram då det är givet för båda figurerna längden av två sidor och storleken av en vinkel. Efter uppgiften kommer definitionen(2.6), som är skriven på två olika sätt. I den andra nämns längden av vektorn, men ingenting om areor. Kryssproduktens egenskaper(2.2, 2.3, 2.4 och 2.10) räknas upp utan bevis medan kryssprodukten av enhetsvektorerna $\vec{i}, \vec{j}$ och $\vec{k}$ motiveras delvis med text och bild. De kryssprodukter som får negativt förtecken eller blir 0 lämnas åt läsaren att motivera. Under mellanrubriken "Vektorprodukt i rymden" bestäms kryssprodukten av två godtyckliga vektorer i komponentform. Första steget samt resultatet(2.7) är utskrivet och igen låter författarna läsaren delta genom att fylla i mellanstegen. Determinanten förklaras inte allmänt, utan endast för kryssprodukten i en treradig determinant(2.9) och det här för att komma ihåg kryssproduktens resultat lättare. Författarna visar och förklarar hur man kommer från den treradiga determinanten(2.9) till resultatet 2.7. Den geometriska tolkningen kommer till sist och den börjar med att bestämma arean för en triangel vars två sidor är vektorer. Arean jämförs med längden av kryssprodukten(2.5) och det konstateras att arean är halva längden av kryssprodukten. Parallellogrammen vars två sidor är samma som den tidigare triangeln, utgörs av två kongruenta trianglar och därmed fås att storleken av parallellogrammens area är samma som längden av kryssprodukten(2.5). Användningen av den geometriska tolkningen presenteras i två exempeluppgifter. Det första exemplet handlar om arean av en triangel och det andra om arean av en parallellogram. För båda figurerna är tre hörnpunkter givna. Nämnvärt är ännu, att efter övningsuppgifterna kommer en utmaning med namnet " En laddnings rörelse i ett magnetfält". Den innehåller en kort förklaring och några uppgifter. [18]

Kotkanen m.fl. börjar avsnittet om kryssprodukten med att skriva definitionen(2.6) och sedan kryssproduktens egenskaper(2.1, 2.2, 2.3 och 2.4). Endast egenskapen 2.2, att kryssprodukten inte är kommutativ bevisas. Kryssprodukten av enhetsvektorerna $\vec{i}, \vec{j}$ och $\vec{k}$ beräknas i ett exempel så att alla olika möjligheter motiveras. Den geometriska tolkningen motiveras utgående från arean av en triangel. Två av sidorna i triangeln är vektorer och arean är hälften så stor som arean av parallellogrammen vars närliggande sidor är samma två vektorer. Arean för parallellogrammen bestäms och konstateras att det är samma uttryck som längden av kryssprodukten(2.5) av de två vektorerna. Slutsatsen presenteras i en ruta för att den ska stå ut. Exemplet som följer presenterar två metoder för att beräkna arean av en triangel. I den första metoden bestäms kryssprodukten med hjälp av egenskaperna(2.1, 2.2, 2.3 och 2.4) och i den andra metoden med hjälp av determinanten(2.9). Båda metoderna slutar med att beräkna halva längden av kryssprodukten. Avsnittet om kryssprodukten avslutas med ett krävande exempel där man ska bevisa summaformlerna för sinus och cosinus. [7]

Böcker som baserar sid på läroplanen 2003

Läroplanen 2003 [24] nämner inte kryssprodukten vilket hänvisas till i boken *Pitkä matematiikka 5, Vektorit* av Kangasaho, Mäkinen, Oikkonen, Paasonen, Salmela och Tahvanainen [6], där de skriver att kryssprodukten inte hör till gymnasiematematiken och därmed inte behandlar ämnet. Två andra böcker behandlar nog kryssprodukten. De här är *Matematiikan taito. 5, Vektorit* av Halmetoja, Häkkinen, Merikoski, Pippola, Silfverberg, Tossavainen och Viilo [4] och *Ellips : lång matematik för gymnasiet. 5, Vektorer* av Kontkanen, Liira, Luosto, Ronkainen, Savolainen och Österberg[8].

Boken av Halmetoja m.fl. [4] har ett avsnitt om kryssprodukten som är så gott som direkt översatt från den svenska boken av Piippola, Silfverberg, Viilo och Burman. Avsnittet behandlar också den skalära trippelprodukten som kommer emellan kryssprodukten och underrubriken ”Sovelluksia fysiikkaan”= (Tillämpningar i fysiken). Tillämpningar i fysiken berättar kort om kraftmoment och en laddnings rörelse i ett magnetfält. Av båda delarna från fysiken finns även lösta exempeluppgifter.

Läroboken av Kontkanen m.fl. är en svensk version av finska boken *Pyramidi 5, Vektorit* utgivet av Kustannusosakeyhtiö Tammi. Avsnittet om kryssprodukten är samma som den tidigare boken av Kontkanen m.fl. [7] förutom att de presenterar flera mellansteg vid bestämmande av absolutbeloppet av kryssprodukten(2.5). De har också tagit bort det långa exemplet där de bevisade summaformlerna för sinus och cosinus.[8]

2.2.3 Sammanfattning av böckerna

I de läroböcker jag studerat var ett tillvägagångssätt överlägset vanligast. Kryssprodukten presenterades som en räkneformel med vissa bestämda egenskaper. Ingen härledning eller förklaring för hur man kommer fram till formeln. Det här kunde påträffas i läroböcker oberoende av vilka läroplaner de baserar sig på och sättet leder inte till bra förståelse då man beaktar det som är sagt i avsnittet 2.1 "Konstruktivism för bättre förståelse". Då ingen härledning görs nekar man möjligheten att utgående från boken konstruktivt bygga upp den nya informationen. Information presenteras utan motivering vilket bör undvikas om man strävar efter förståelse. Man måste dock beakta att kryssprodukten har figurerat som ett fördjupat material i den finländska gymnasieutbildningen och därför har inte författarna heller gjort ett så omfattande kapitel om kryssprodukten.

I två böcker kan man klart se försök att motivera kryssprodukten. Miinala, Salimäki och Vuorinens[14] utgår ifrån att bestämma en vinkelrät vektor mot två rumsvektorer. De använder sig av punktprodukten, som studeranden ska känna till, för att bilda ett ekvationssystem vars lösning är kryssprodukten i komponentform(2.7). Sambandet mellan den här kryssprodukten och arean för en parallellogram härleds också, fastän utgångsläget till härledningen inte är motiverat. Lahti och Leino [10] bildar i sin bok en vektor som har bestämda egenskaper och sedan kallar det för kryssprodukten. Fastän den här metoden inte varierar avsevärt från att bara ge en definition(2.6) så ger det åtminstone mig än bättre bild om vad kryssprodukten är.

De äldsta läroböckerna bevisade en del av kryssproduktens egenskaper. Att bevisa är ett bra sätt att öka förståelsen medan man samtidigt övar att jobba med ifrågavarande formeln. Man kan se att avsnittet om kryssprodukten blivit kortare med tiden, och det är just bevisen som fallit först bort. Det här kan dock vara frågan om en större trend inom matematiken, en minskning av bevis i läroböcker. Ifall man vill vara snål på bevisen i boken kunde bevisen vara som övningsuppgifter. På det sättet skulle man minska på mängden information som är omotiverat givet åt studeranden.

Synen på att vad som är viktigt hos kryssprodukten varierade mellan läromedlen. Som exempel behandlar Lehtosaari, Leino och Norlamo [12] beräknandet med hjälp av determinanter(2.8 och 2.9) som ett fördjupat material och därmed minskar dess roll. Oinas-Kukkonen, Merikoski, Niva och Keranto [15] kallar beräknande med hjälp av determinanter(2.8 och 2.9) som kryssproduktens algebraiska framställning som är till synes lika viktig som själva definitionen(2.6). Miinala, Salimäki och Vuorinen [14] nämner inte alls formeln för kryssprodukten(2.6) i deras definition. Beräknande med determinant(2.8 och 2.9) har en stor roll genom hela avsnittet och därmed kan man påstå att Miinala, Salimäki och Vuorinen [14] förknippar kryssprodukten med beräknande med hjälp determinanter.

Kryssprodukten kan användas då man bestämmer ekvationen för plan och utökar möjligheterna att tillämpa vektorer för rumskroppar i matematiken. I läroplanen 2015 [25] är undersökandet av figurers egenskaper ett kursmål i vektorkursen. Förutom i matematiken används även kryssprodukten i fysiken. Läroboken av Halmetoja m.fl. [4] och läroboken av Piippola, Silferberg, Viilo Och Burman [18] har beaktat det här med ett avsnitt om tillämpningar i fysiken. Kraftmoment och en laddad partikels rörelse i ett magnetfält är sådana tillämpningar. Jag anser att det vore bra med en bättre förståelse för kryssprodukten för de som valt att studera fysik. Om man inte förstår kryssprodukten kan man inte heller förstå tillämpningarna. Orsaken till varför kryssprodukten kan tillämpas i fysiken kommer jag inte att behandla i den här avhandlingen.

Kapitel 3

Härledning av kryssprodukten

Det här kapitlet innehåller ett sätt att härleda kryssprodukten. Målet är att konstruktivt bygga upp kryssprodukten. Det antas att gymnasiets vektorkurs är bekant för läsaren och därav härleds kryssprodukten med de byggstenar som torde vara bekanta för en studerande som läst vektorkursen i gymnasiet.

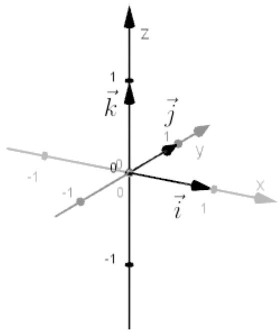
3.1 Egenskaper för vektorer

Jag börjar med några centrala egenskaper hos vektorer. Det här är ingen komplett uppbyggnad av vektorläran, utan valda delar som anses vara viktiga för att förstå härledningen. Inledningsvis bör poängteras att vektorer i planet betyder tvådimensionella vektorer och vektorer i rummet är tredimensionella vektorer. En stor del av härledningarna som görs är oberoende av koordinatsystemet, men då målgruppen är gymnasiestuderanden beaktar vi endast det kartesiska koordinatsystemet(figur 3.1).

3.1.1 Enhetsvektorer med högerhandsregeln

I planet behövs det två enhetsvektorer för att uttrycka alla vektorer. De kallas $\vec{i}$ och $\vec{j}$, och har följande egenskaper. Längden av båda enhetsvektorer är ett, $\vec{i}$ löper i x-axelns positiva riktning och $\vec{j}$ löper i y-axelns positiva riktning. Koordinataxlarna x och y är vinkelräta mot varandra, alltså är också $\vec{i}$ och $\vec{j}$ vinkelräta mot varandra. I rummet finns en dimension till varför vi behöver ytterligare en koordinataxel, z-axeln. Motsvarande enhetsvektor betecknas med $\vec{k}$. Enhetsvektorn $\vec{k}$ är vinkelrät mot både $\vec{i}$ och $\vec{j}$ (Figur 3.1).

Det kartesiska koordinatsystemet i rummet är uppbyggt som ett högerhandssystem och följer högerhandsregeln. Med den regeln kan man lätt bestämma de positiva riktningarna för alla tre axlar. Högerhandsregeln används så att man sträcker den högra handens



Figur 3.1: Koordinataxlarna och vektorerna $\vec{i}, \vec{j}$ och $\vec{k}$ i rummet.

pekfinger rakt fram, vänder långfingret så att den bildar en rät vinkel med pekfingret och lyfter tummen så att den är vinkelrät mot både pekfingret och långfingret. Pekfingret visar x-axelns positiva riktning, långfingret y-axelns positiva riktning och tummen z-axelns positiva riktning. Enhetsvektorerna $\vec{i}, \vec{j}$ och $\vec{k}$ följer då också högerhandsregeln vilket beaktas i ett senare skede av härledningen. En matematisk sammanställning av enhetsvektorerna ser ut som följande:

$$|\vec{i}| = 1 \qquad |\vec{j}| = 1 \qquad |\vec{k}| = 1 \qquad \vec{i} \perp \vec{j} \qquad \vec{k} \perp \vec{i} \qquad \vec{k} \perp \vec{j}.$$

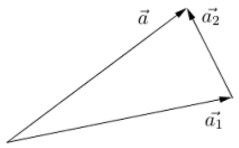
3.1.2 Vinkeln mellan två vektorer

Då två vektorer skär varandra eller startar från samma punkt bildar de två vinklar. Den vinkel som kallas för vinkeln mellan två vektorer är den som är större än 0° och mindre än 180° och bildas då vektorerna flyttas så att de börjar från samma punkt. Symbolen för vinkeln mellan vektorerna $\vec{a}$ och $\vec{b}$ är $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$ i det här arbetet.

3.1.3 Vektorprojektion

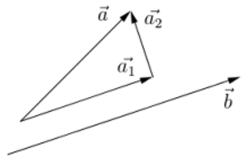
Två typer av vektorprojektioner förekommer i den här härledningen. Skillnaden mellan de här två är endast i det som vektorerna blir projicerad på. Vektorprojektionen grundar sig på addition av vektorer, eller mera specifikt på uppdelning av vektorer i olika komponenter. Vektorn $\vec{a}$ kan skrivas som en summa $\vec{a} = \vec{a_1} + \vec{a_2}$ förutsatt att vektorn $\vec{a_1}$ har samma utgångspunkt som $\vec{a}$ och $\vec{a_2}$ börjar där $\vec{a_1}$ slutar. Vektorn $\vec{a_2}$ måste ännu ha samma ändpunkt som $\vec{a}$(Figur 3.2).

Första typen av vektorprojektion är då en vektor projiceras på en annan vektor. Vektorn $\vec{a}$ projiceras på vektorn $\vec{b}$. Vektorn $\vec{a}$ delas in i två komponenter, där $\vec{a_1}$ är parallell



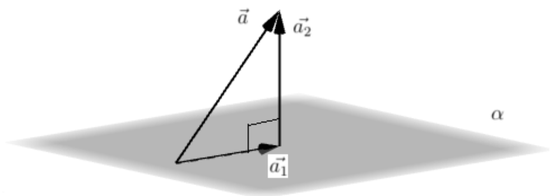
Figur 3.2: Indelning av vektorn $\vec{a}$ i komponenterna $\vec{a_1}$ och $\vec{a_2}$.

med vektorn $\vec{b}$ och $\vec{a_2}$ är vinkelrät mot $\vec{b}$. Den komponent som är parallell med $\vec{b}$, alltså $\vec{a_1}$, kallas för vektorns $\vec{a}$ projektionsvektor på vektorn $\vec{b}$(Figur 3.3).



Figur 3.3: Projicering av vektorn $\vec{a}$ på vektorn $\vec{b}$ ger projektionsvektorn $\vec{a_1}$.

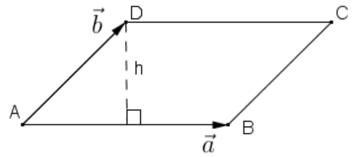
Vektorer kan också projiceras på plan. En vektor som projiceras på ett plan kommer som i föregående stycke att delas in i två komponenter. Den ena komponenten kommer att löpa i samma riktning som planet är och den andra vinkelrätt mot planet. Den komponent som löper i samma riktning som planet är projektionsvektorn(Figur 3.4).



Figur 3.4: Projicering av vektorn $\vec{a}$ på planet α som ger projektionsvektorn $\vec{a_1}$.

3.2 Arean av en parallellogram i planet

Utgångsläget i planet kommer att vara parallellogrammen ABCD som spänns upp av vektorerna $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ och $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$ (Figur 3.5). Arean A för en parallellogram bestäms med formeln $A = x \cdot h$, där x är längden av basen och h är längden av höjden. Höjden är det vinkelräta avståndet från basen till den motstående sidan eller dess förlängning. I en parallellogram är motstående sidor alltid lika långa och parallella. Det här leder till att vektorn $\vec{a}$ är också $\overrightarrow{DC}$ och vektorn $\vec{b}$ är också $\overrightarrow{BC}$.



Figur 3.5: Parallellogrammen ABCD som spänns upp av vektorerna $\vec{a}$ och $\vec{b}$.

Då basens längd är samma som längden av vektorn $\vec{a}$, $x = |\vec{a}|$, och vinkeln mellan vektorerna $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$ beaktas, kan följande trigonometriska samband uttryckas:

$$\sin \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{h}{|\vec{b}|}. \tag{3.1}$$

Uttrycket löses med avseende på höjden vilket ger följande sätt att uttrycka höjden med hjälp av vinkeln och längden av vektorn $\vec{b}$:

$$h = \sin \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})|\vec{b}|. \tag{3.2}$$

Arean av en parallellogram som spänns upp av vektorerna $\vec{a}$ och $\vec{b}$ betecknas $A(\vec{a}, \vec{b})$. Utgående från formeln för parallellogrammens area och genom att substituera in uttrycken för höjden samt basen fås följande uttryck för $A(\vec{a}, \vec{b})$:

$$A(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \sin \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})|\vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}). \tag{3.3}$$

Ett allmänt sätt att uttrycka vektorer är genom att kombinera enhetsvektorerna $\vec{i}$ och $\vec{j}$ med koefficienter som bestämmer dess längder, alltså uttrycka vektorerna i komponentform. Alla vektorer i planet kan uttryckas som $a\vec{i} + b\vec{j}$ där a och b är reella tal. Utgående från det här bör en del olika fall granskas för att kunna vara säker på att formeln 3.3 fungerar för alla vektorer som är uttryckta i komponentform.

3.2.1 Flyttningsregeln för koefficienter i planet

Först undersöks fallet då vektorerna som spänner upp parallellogrammen multipliceras med positiva reella tal. Låt $\vec{a}$ och $\vec{b}$ vara vektorer i planet samt k och l vara de här talen. Parallellogrammen som spänns upp av vektorerna $k\vec{a}$ och $l\vec{b}$ undersöks. Längden av en vektor inverkar inte på dess riktning och då koefficienterna $k, l \geq 0$ fås sambandet nedan:

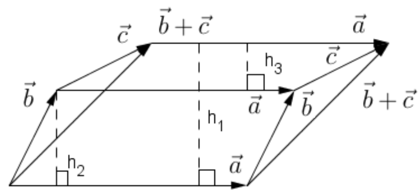
$$\begin{aligned} A(k\vec{a}, l\vec{b}) =& |k\vec{a}||l\vec{b}| \sin \sphericalangle(k\vec{a}, l\vec{b}) \\ =& k|\vec{a}|l|\vec{b}| \sin \sphericalangle(k\vec{a}, l\vec{b}) \\ =& kl|\vec{a}||\vec{b}| \sin \sphericalangle(k\vec{a}, l\vec{b}) \\ =& kl|\vec{a}||\vec{b}| \sin \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) \\ =& klA(\vec{a}, \vec{b}). \end{aligned}$$

Det här kan sammanfattas i följande sats:

Sats 3.4. *För alla vektorer $\vec{a}$ och $\vec{b}$ i planet är $A(k\vec{a}, l\vec{b}) = klA(\vec{a}, \vec{b})$, då $k, l \geq 0$.*

3.2.2 Vektordistributivitet i planet

Låt $\vec{a}$, $\vec{b}$ och $\vec{c}$ vara vektorer i planet. Vektorerna $\vec{a}$ och $\vec{b}$ spänner upp en parallellogram med höjden h_2, vektorerna $\vec{a}$ och $\vec{c}$ spänner upp en parallellogram med höjden h_3 och vektorn $\vec{a}$ och summavektorn $\vec{b} + \vec{c}$ spänner upp parallellogrammen med höjden h_1 (Figur 3.6). Vektordistributivitet i planet undersöks utgående från parallellogrammen som spänns upp av vektorn $\vec{a}$ och summavektorn $\vec{b} + \vec{c}$. Utgående från formel 3.2 kan h_1 substitueras in i uttrycket för arean. Höjden h_1 kan skrivas som summan av höjderna h_2 och h_3. Då fås härledningen och sambandet enligt följande:



Figur 3.6: Tre parallellogrammer med inritade höjder.

$$
\begin{aligned}
A(\vec{a},\vec{b}+\vec{c}) =&|\vec{a}||\vec{b}+\vec{c}|\sin\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}+\vec{c})\\
=&|\vec{a}|h_1\\
=&|\vec{a}|(h_2+h_3)\\
=&|\vec{a}|h_2+|\vec{a}|h_3\\
=&|\vec{a}||\vec{b}|\sin\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})+|\vec{a}||\vec{c}|\sin\sphericalangle(\vec{a},\vec{c})\\
=&A(\vec{a},\vec{b})+A(\vec{a},\vec{c}).
\end{aligned}
$$

Nämnvärt är att $\vec{b}$ och $\vec{c}$ kan vara riktade så att sambandet mellan höjderna som användes inte stämmer. Ifall vektorn $\vec{c}$ skulle vara riktad neråt i figur 3.6 vore det ett sådant fall. Vektordistributiviteten granskas för att se hur formeln $A(\vec{a},\vec{b}) = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})$ fungerar då vektorer är uttryckta i komponentform. Om $\vec{b}$ och $\vec{c}$ vore uttryckta i komponentform kommer deras summavektor att kunna räknas ut efter vilket bekymret, med sambandet mellan höjderna, försvinner.

Sats 3.5. *$A(\vec{a},\vec{b}+\vec{c}) = A(\vec{a},\vec{b}) + A(\vec{a},\vec{c})$ förutsatt att $\vec{b}$ och $\vec{c}$ är båda riktade så att deras summavektors spets är längre bort från basen eller basens förlängning än de individuella vektorernas spetsar är från basen eller basens förlängning.*

3.2.3 Kommutativitet i planet

Låt $\vec{a}$ och $\vec{b}$ vara vektorer i planet. Vinkeln mellan två vektorer definierades i avsnitt 3.1.2 och utgående från den är det ingen skillnad för vilken vektor som nämns först. Vinkeln mellan vektorerna $\vec{a}$ och $\vec{b}$ är samma som vinkeln mellan vektorerna $\vec{b}$ och $\vec{a}$, eller $\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = \sphericalangle(\vec{b},\vec{a})$. Utgående från det här kan följande resonemang göras:

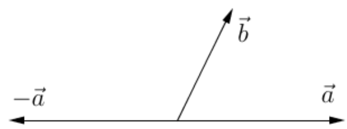
$$
\begin{aligned}
A(\vec{a},\vec{b}) =&|\vec{a}||\vec{b}|\sin\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})\\
=&|\vec{b}||\vec{a}|\sin\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})\\
=&|\vec{b}||\vec{a}|\sin\sphericalangle(\vec{b},\vec{a})\\
=&A(\vec{b},\vec{a}).
\end{aligned}
$$

Sats 3.6. *$A(\vec{a}, \vec{b}) = A(\vec{b}, \vec{a})$ för alla vektorer $\vec{a}$ och $\vec{b}$ i planet.*

3.2.4 Motvektorer i planet

Låt $\vec{a}$ och $\vec{b}$ vara vektorer i planet. Vektorn -$\vec{a}$ placeras så att den börjar från samma punkt som $\vec{a}$ och $\vec{b}$ (Figur 3.7). Sambandet mellan vinklarna som också kan tolkas ur figur 3.7 är att $\sphericalangle(-\vec{a}, \vec{b})$ och $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$ är varandras supplementvinklar, alltså gäller $\sphericalangle(-\vec{a}, \vec{b}) = 180° - \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$. Sinus för en vinkel och dess supplementvinkel ger samma värde, alltså $\sin\alpha = \sin(180° - \alpha)$. De här iakttagelserna ger upphov till följande resonemang och sats:

$$\begin{aligned} A(-\vec{a}, \vec{b}) &= |-\vec{a}||\vec{b}| \sin\sphericalangle(-\vec{a}, \vec{b}) \\ &= |\vec{a}||\vec{b}| \sin(180° - \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})) \\ &= |\vec{a}||\vec{b}| \sin\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) \\ &= A(\vec{a}, \vec{b}). \end{aligned}$$



Figur 3.7: Vektorn -$\vec{a}$ placerad att börja från samma punkt som $\vec{a}$ och $\vec{b}$.

Sats 3.7. *$A(-\vec{a}, \vec{b}) = A(\vec{a}, \vec{b})$ för alla vektorer $\vec{a}$ och $\vec{b}$ i planet.*

3.2.5 Enhetsvektorer i planet

Det sista fallet som bör granskas är hur arean av parallellogrammen blir då den spänns upp enbart av enhetsvektorerna $\vec{i}$ och $\vec{j}$. Vinkeln mellan enhetsvektorerna $\sphericalangle(\vec{i}, \vec{j})$ är alltid 90° och $\sin 90° = 1$. Längden av enhetsvektorerna är ett. Följande uträkning är då motiverad:

$$A(\vec{i}, \vec{j}) = |\vec{i}||\vec{j}| \sin\sphericalangle(\vec{i}, \vec{j}) = |\vec{i}||\vec{j}| \sin 90° = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1.$$

Sats 3.8. $A(\vec{i}, \vec{j}) = 1.$

3.2.6 Arean för alla parallellogrammer i planet

Som följande används de satser som härletts för vektorer i planet. Satserna jobbades fram för att granska hur sättet att räkna arean av en parallellogram kan användas för vektorer som är uttryckta i komponentform. Anta att $\vec{u} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j}$ och $\vec{v} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j}$ är två vektorer i planet och att a_1, a_2, b_1 och b_2 kan vara vilka som helst reella tal. Då kommer vektorerna $\vec{u}$ och $\vec{v}$ att kunna spänna upp alla parallellogrammer i planet. Arean av parallellogrammen är då

$$A(\vec{u}, \vec{v}) = A(a_1\vec{i} + a_2\vec{j}, b_1\vec{i} + b_2\vec{j}).$$

Med hjälp av vektordistributivitet och sats 3.4 kan uttrycket delas upp i två termer:

$$A(a_1\vec{i} + a_2\vec{j}, b_1\vec{i}) + A(a_1\vec{i} + a_2\vec{j}, b_2\vec{j}).$$

Kommutativiteten och sats 3.5 ger upphov till att vektordistributiviteten kan användas på nytt:

$$A(b_1\vec{i}, a_1\vec{i}) + A(b_1\vec{i}, a_2\vec{j}) + A(b_2\vec{j}, a_1\vec{i}) + A(b_2\vec{j}, a_2\vec{j}).$$

Flyttningsregeln för koefficienter och sats 3.3 gör att enhetsvektorernas koefficienter kan skrivas utanför:

$$b_1a_1A(\vec{i}, \vec{i}) + b_1a_2A(\vec{i}, \vec{j}) + b_2a_1A(\vec{j}, \vec{i}) + b_2a_2A(\vec{j}, \vec{j}).$$

Arean av en parallellogram som spänns upp är två parallella vektorer är trivialt 0 och sats 3.7 ger slutet på härledningen:

$$b_1a_1 \cdot 0 + b_1a_2 \cdot 1 + b_2a_1 \cdot 1 + b_2a_2 \cdot 0 = b_1a_2 + b_2a_1.$$

Ovanstående sätt att beräkna arean för parallellogrammer i planet kulminerar i ett simpelt uttryck då vektorerna är skrivna i komponentform. Ifall någon av a_1, a_2, b_1 och b_2 vore negativa, så skulle satsen för motvektorer användas (Sats 3.6) och härledningen skulle resultera i samma uttryck.

Utgående från det här kapitlet kan alltså påstås, att då en parallellogram i planet spänns upp med hjälp av två vektorer så kan dess area bestämmas.

3.3 Arean av en parallellogram i rummet

Räkneregler i planet kan inte alltid tillämpas i rummet. Ett motexempel för att formeln 3.3 ($A(\vec{a},\vec{b}) = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})$) inte kan användas i rummet inleder det här kapitel. Motexemplet tvingar oss att härleda ett nytt sätt att beräkna arean för de parallellogrammer som spänns upp av rumsvektorer. Härledningen börjar med utgångspunkten i enhetsvektorerna $\vec{i}, \vec{j}$ och $\vec{k}$ och slutar i ett användbart sätt att beräkna arean för parallellogrammer. Efter det görs liknande granskningar som i avsnitt 3.2, där den första, vektordistributivitet, också är ett alternativt sätt att ta fram räknesättet den här härledningen handlar om.

3.3.1 Motexempel för att vektordistributivitet inte gäller i rummet

Med följande motexempel kan påvisas att räknesättet för att bestämma arean av en parallellogram i planet inte gäller i rummet.

Låt parallellogrammen spännas upp av vektorerna $\vec{i}$ och summavektorn $\vec{j}+\vec{k}$ vilket enligt formel 3.3 kan skrivas som

$$A(\vec{i},\vec{j}+\vec{k}) = |\vec{i}||\vec{j}+\vec{k}|\sin\sphericalangle(\vec{i},\vec{j}+\vec{k}).$$

Summavektorns längd är enligt Pythagoras sats $\sqrt{2}$. Alla vektorer som innehåller endast komponenterna $\vec{j}$ och $\vec{k}$ ligger i vektorns $\vec{i}$:s normalplan och därmed är $\sin\sphericalangle(\vec{i},\vec{j}+\vec{k}) = \sin 90^\circ = 1$ vilket ger att

$$|\vec{i}||\vec{j}+\vec{k}|\sin\sphericalangle(\vec{i},\vec{j}+\vec{k}) = 1\cdot\sqrt{2}\cdot 1 = \sqrt{2}.$$

Görs uträkningen med hjälp av sats 3.4 fås följande som motstrider det som beräknades nyss:

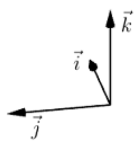
$$\begin{aligned}
A(\vec{i},\vec{j}+\vec{k}) =& A(\vec{i},\vec{j}) + A(\vec{i},\vec{k})\\
=& |\vec{i}||\vec{j}|\sin\sphericalangle(\vec{i},\vec{j}) + |\vec{i}||\vec{k}|\sin\sphericalangle(\vec{i},\vec{k})\\
=& 1\cdot 1\cdot 1 + 1\cdot 1\cdot 1\\
=& 2 \neq \sqrt{2}.
\end{aligned}$$

Den vektordistributiva regeln gäller inte i rummet för att parallellogrammerna kan ha olika riktningar. Riktningen måste beaktas och det kommer att vara utgångspunkten för arbetet som följer.

3.3.2 Areaberäkning för parallellogrammer i rummet

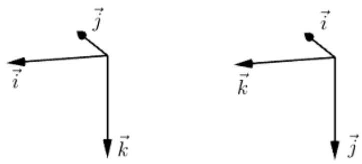
I föregående avsnitt poängterades att parallellogrammernas riktning bör beaktas. Normalen till en yta anger ytans riktning. Parallellogrammerna kommer att symboliseras med en normal som är lika lång som ifrågavarande parallellogrammens area är. Låt en parallellogram spännas upp av enhetsvektorerna $\vec{i}$ och $\vec{j}$. Enhetsvektorerna ligger vinkelrätt mot varandra och deras längder är 1. Parallellogrammen i frågan är en kvadrat med arean 1, $A = 1 \cdot 1 = 1$.

En yta har två normaler och vilken som väljs ska först fastslås. Synvinkeln på vektorerna väljs så att den förstnämnda vektorn löper framåt och den andra vektorn utgår ifrån samma punkt och bildar en vinkel som är mindre än 180°. I det här fallet kommer den andra vektorn att löpa åt vänster. Normalen som används är den som löper rakt uppåt i det här fallet. Högerhandsregeln som presenterades kort i avsnitt 3.1.1 kan även användas här. Nu är tanken den, att pekfingret går i den riktningen som den förstnämnda vektorn och långfingret i riktningen för den följande nämnda vektorn. Tummen kommer att visa riktningen för normalen. Då man beaktar vektorerna $\vec{i}$ och $\vec{j}$, i den ordningen, kommer normalen att vara i samma riktning som enhetsvektorn $\vec{k}$. Arean av parallellogrammen var 1 så det ger att normalvektorn faktiskt kommer att vara $1 \cdot \vec{k} = \vec{k}$(Figur 3.8). Normalvektorn som har samma längd som storleken av parallellogrammens area kommer att kallas för areavektor.



Figur 3.8: Normalvektorn som bildas då parallellogrammen spänns upp av $\vec{i}$ och $\vec{j}$.

Som följande fall granskas parallellogrammen som spänns upp av enhetsvektorerna $\vec{j}$ och $\vec{i}$, i den ordningen. Då enhetsvektorn $\vec{j}$ löper rakt fram och $\vec{i}$ i sin tur åt vänster kommer normalen till den att vara motsatt riktad till det tidigare fallet, och därmed -$\vec{k}$. I figur 3.9 finns två bilder på enhetsvektorernas riktningar då koordinatsystemet har vridits. Bilden till vänster kan användas i fallet då parallellogrammen spänns upp av enhetsvektorerna $\vec{j}$ och $\vec{i}$ och bilden till höger kan användas då parallellogrammen spänns upp av enhetsvektorerna $\vec{i}$ och $\vec{k}$ som utgör nästa fall. Enhetsvektorn $\vec{i}$ löper rakt fram och enhetsvektorn $\vec{k}$ löper åt vänster. I det här fallet kommer normalvektorn att vara motsatt riktad till enhetsvektorn $\vec{j}$. Då storleken på parallellogrammen är 1 så är areavektorn -$\vec{j}$. På samma sätt kan areavektorn bestämmas för de kvarstående parallellogrammerna som



Figur 3.9: Enhetsvektorerna presenterade från ur synvinklar.

spänns upp av enbart två av enhetsvektorerna $\vec{i}$, $\vec{j}$ och $\vec{k}$. Alla möjligheter är följande:

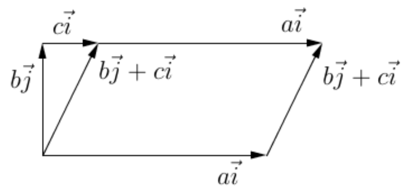
(3.9) $\quad \vec{i},\vec{j} : \vec{k} \qquad \vec{j},\vec{i} : -\vec{k} \qquad \vec{i},\vec{k} : -\vec{j} \qquad \vec{k},\vec{i} : \vec{j} \qquad \vec{j},\vec{k} : \vec{i} \qquad \vec{k},\vec{j} : -\vec{i}.$

I fallen där de uppspännande vektorerna är en och samma så bildas ingen parallellogram, arean $A = 0$. Den här tanken är så trivial att den kan utvidgas till påståendet där det inte bildas en parallellogram då de uppspännande vektorerna är parallella.

Talen a och b antas vara positiva reella tal. Förlängning eller förkortning av enhetsvektorerna $\vec{i}$ och $\vec{j}$ med a och b ger upphov till nya parallellogrammer som spänns upp av vektorerna $a\vec{i}$ och $b\vec{j}$. Längden inverkar inte på riktningen för vektorn och därför har areavektorn för parallellogrammen som spänns upp av $a\vec{i}$ och $b\vec{j}$ samma riktning som areavektorn för parallellogrammen som spänns upp av $\vec{i}$ och $\vec{j}$, alltså riktningen för $\vec{k}$. Längden av areavektorn bör motsvara arean av parallellogrammen. Då vektorerna $a\vec{i}$ och $b\vec{j}$ är de uppspännande vektorerna är parallellogrammen faktiskt en rektangel. Rektangelns area bestäms av basen multiplicerat med höjden och då $a\vec{i}$ väljs som bas och $b\vec{j}$ som höjd blir arean $A = |a\vec{i}| \cdot |b\vec{j}| = ab$. Areavektorn kan då skrivas som $ab\vec{k}$. Oberoende av vilka enhetsvektorer $\vec{i}$, $\vec{j}$ och $\vec{k}$ som förlängs eller förkortas så kommer areavektorns storlek av längdernas produkt och riktningen från villkoren 3.9 ovan.

De parallellogrammer som hittills granskats i det här avsnittet har spänts upp av endast vektorer i samma riktning som enhetsvektorerna $\vec{i}$, $\vec{j}$ och $\vec{k}$. Vektorer kan också löpa i andra riktningar och då betraktas de som summavektorer. Det simpla fallet där parallellogrammen spänns upp av $a\vec{i}$ och $b\vec{j} + c\vec{i}$, där a,b och c är positiva reella tal, kommer att inleda granskningen med summavektorerna. Summavektorn är ovanligt skrivet med $\vec{j}$ komponenten före $\vec{i}$ för att bilden(Figur 3.10) av fallet ska vara mera begriplig. I det här fallet fås en parallellogram och arean av parallellogrammen räknas med basen multiplicerat med höjden. För att repetera så är höjden det vinkelräta avståndet från basen till motstående sida, eller dess förlängning. Enligt figur 3.10 är höjden samma som vektorn $b\vec{j}$. Då blir arean av parallellogrammen ab och areavektorn $ab\vec{k}$. De parallella komponenterna till den förstnämnda vektorn som spänner upp parallellogrammen kommer inte att inverka på arean och därmed inte heller på areavektorn.

Följande steg är att granska parallellogrammen som spänns upp av $a\vec{i}$ och summavektorn $b\vec{j} + c\vec{k} + d\vec{i}$, där a, b, c och d är positiva reella tal. Nu finns det igen en komponent



Figur 3.10: Parallellogram som spänns upp av vektorerna $a\vec{i}$ och $b\vec{j}+c\vec{i}$.

som är parallell med den förstnämnda uppspännande vektorn. Man behöver inte beakta den. De återstående komponenterna, $b\vec{j}$ och $c\vec{k}$ är vinkelräta mot varandra och dess summavektors längd kan lätt räknas med Pythagoras sats.

Vid granskningen av fallen då den förstnämnda vektorn av de uppspännande vektorerna också är en summavektor beaktas ett allmänt fall. Låt vektorerna $\vec{a}$ och $\vec{b}$ spänna upp en parallellogram i rummet. Då de komponenter som är parallella med den förstnämnda inte behöver beaktas, skrivs vektorn utgående från vektorprojektion som $\vec{b} = \vec{b}_{\vec{a}} + \vec{b}_\alpha$, där $\vec{b}_{\vec{a}}$ är parallell med och $\vec{b}_\alpha$ är vinkelrät mot $\vec{a}$. Arean av parallellogrammen är då $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}_\alpha|$. Med hjälp av trigonometri kan längden av $\vec{b}_\alpha$ skrivas som $\sin \sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) \cdot |\vec{b}|$. Riktningen av areavektorn kommer att vara vinkelrät mot både $\vec{a}$ och $\vec{b}$. Beteckningen $\vec{n}_{\vec{a},\vec{b}}$ används för en enhetsvektor som är vinkelrät mot både $\vec{a}$ och $\vec{b}$. Nu kan areavektorn skrivas som $|\vec{a}||\vec{b}| \sin \sphericalangle(\vec{a},\vec{b})\vec{n}_{\vec{a},\vec{b}}$. Härefter används symbolen $\vec{A}(\vec{a},\vec{b})$ för areavektorn och den beräknas med uttrycket $\vec{A}(\vec{a},\vec{b}) = |\vec{a}||\vec{b}| \sin \sphericalangle(\vec{a},\vec{b})\vec{n}$, där $\vec{n}$ en förenkling av $\vec{n}_{\vec{a},\vec{b}}$. För enhetsvektorerna $\vec{i}$, $\vec{j}$ och $\vec{k}$ kan då skrivas:

$$\vec{A}(\vec{i},\vec{j}) = \vec{k} \qquad \vec{A}(\vec{k},\vec{i}) = \vec{j} \qquad \vec{A}(\vec{j},\vec{k}) = \vec{i}$$

$$\vec{A}(\vec{j},\vec{i}) = \text{-}\vec{k} \qquad \vec{A}(\vec{i},\vec{k}) = \text{-}\vec{j} \qquad \vec{A}(\vec{k},\vec{j}) = \text{-}\vec{i}.$$

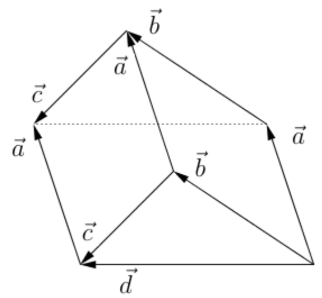
Rumsvektorernas komponentindelning i $\vec{i}, \vec{j}$ och $\vec{k}$ användes i härledningen av areavektorn

$$\vec{A}(\vec{a},\vec{b}) = |\vec{a}||\vec{b}| \sin \sphericalangle(\vec{a},\vec{b})\vec{n}, \tag{3.10}$$

men några viktiga teckenregler kommer att följa vid granskningen av de samma som för parallellogrammerna i planet. Till först en alternativ härledning till det här avsnittet, där vektordistributiviteten som inte fungerade vid övergången från planet till rummet kommer att spela en stor roll. Vektordistributiviteten för rumsvektorer kommer då också att påvisas.

3.3.3 Härledning av areavektorn via ett prisma och vektordistributiviteten

Då planets vektordistributiva regel(3.4) inte gäller i rummet kommer den att vara utgångspunkten för den här härledningen. Låt vektorerna $\vec{a}, \vec{b}$ och $\vec{c}$ vara vektorer i rummet. Vektorerna flyttas så, att $\vec{a}$ och $\vec{b}$ utgår ifrån samma punkt, och $\vec{c}$ börjar där $\vec{b}$ slutar. Vektorerna spänner upp ett prisma där prismats ena sida är en triangel med sidorna $\vec{b}, \vec{c}$ och summavektorn $\vec{b} + \vec{c}$. Summavektorn får namnet $\vec{d}$ (Figur 3.11). Triangeln kallas för prismats bas. Tre av sidorna i prismat är parallellogrammer och respektive parallellogram spänns upp av vektorerna $\vec{a}$ och $\vec{b}$, $\vec{a}$ och $\vec{c}$ och den tredje av $\vec{a}$ och summavektorn $\vec{d}$.



Figur 3.11: Ett prisma som spänns upp av rumsvektorerna $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ och $\vec{d}$.

Vektorn $\vec{a}$ antas vara basen för alla tre parallellogrammer och $\vec{b}, \vec{c}$ och summavektorn $\vec{d}$ projiceras på normalplanet α till $\vec{a}$. Det här ger projektionsvektorerna

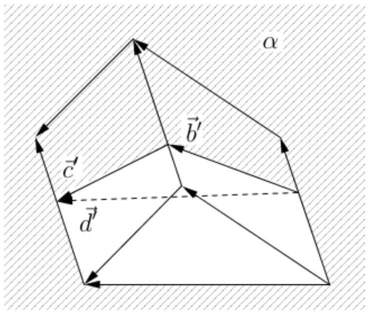
$$\vec{b}' = |\vec{b}| \sin \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) \vec{b}_\alpha,$$

$$\vec{c}' = |\vec{c}| \sin \sphericalangle(\vec{a}, \vec{c}) \vec{c}_\alpha$$

och

$$\vec{d}' = |\vec{d}| \sin \sphericalangle(\vec{a}, \vec{d}) \vec{d}_\alpha.$$

Då projektionsvektorerna ligger i normalplanet α, är de alla vinkelräta mot vektorn $\vec{a}$ som är vald till basen av parallellogrammerna. Projektionsvektorerna är då lika långa som höjden i de respektive parallellogrammerna. Projektionsvektorerna ligger i ett och samma plan och enligt figur 3.12 så gäller sambandet $\vec{b}' + \vec{c}' = \vec{d}'$ som bildar en projektion av basen i prismat på normalplanet α.



Figur 3.12: Projektionsvektorerna $\vec{b}', \vec{c}'$ och $\vec{d}'$ på normalplanet α i samma prisma som i figur 3.11.

Riktningen av ett plan anges med normalen till planet. Projektionsvektorerna roteras $90°$ medsols då synpunkten är längs basvektorn i respektive parallellogrammer. Det här ger normalvektorerna $\vec{b}_n, \vec{c}_n$ och $\vec{d}_n$ för vilka det också gäller $\vec{b}_n + \vec{c}_n = \vec{d}_n$. Nu är

$$\vec{b}_n = |\vec{b}| \sin \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) \vec{n}_{\vec{a},\vec{b}},$$

$$\vec{c}_n = |\vec{c}| \sin \sphericalangle(\vec{a}, \vec{c}) \vec{n}_{\vec{a},\vec{c}}$$

och

$$\vec{d}_n = |\vec{d}| \sin \sphericalangle(\vec{a}, \vec{d}) \vec{n}_{\vec{a},\vec{d}}$$

där beteckningen $\vec{n}_{\vec{x}\vec{y}}$ står för enhetsvektorn som är vinkelrät mot både $\vec{x}$ och $\vec{y}$. Vektorn $\vec{n}_{\vec{x}\vec{y}}$ bör ännu följa högerhandsregeln för att vara säker på vilken av de två normalerna det är frågan om.

Enligt likformigheten kan båda leden i $\vec{b}_n + \vec{c}_n = \vec{d}_n$ multipliceras med längden av $\vec{a}$ vilket ger $|\vec{a}|\vec{b}_n + |\vec{a}|\vec{c}_n = |\vec{a}|\vec{d}_n$, vilket kan skrivas som

$$|\vec{a}||\vec{b}| \sin \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) \vec{n}_{\vec{a},\vec{b}} + |\vec{a}||\vec{c}| \sin \sphericalangle(\vec{a}, \vec{c}) \vec{n}_{\vec{a},\vec{c}} = |\vec{a}||\vec{d}| \sin \sphericalangle(\vec{a}, \vec{d}) \vec{n}_{\vec{a},\vec{d}}.$$

Vid beaktande av areavektorn och att $\vec{d} = \vec{b} + \vec{c}$ så kan följande skrivas, vilket bevisar att vektordistributiviteten gäller för räknandet med areavektorn:

$$\vec{A}(\vec{a}, \vec{b}) + \vec{A}(\vec{a}, \vec{c}) = \vec{A}(\vec{a}, \vec{d}) = \vec{A}(\vec{a}, \vec{b} + \vec{c}). \tag{3.11}$$

Sats 3.12. *För alla vektorer $\vec{a}, \vec{b}$ och $\vec{c}$ i rummet gäller att $\vec{A}(\vec{a},\vec{b})+\vec{A}(\vec{a},\vec{c}) = \vec{A}(\vec{a},\vec{b}+\vec{c})$.*

3.3.4 Flyttningsregeln för koefficienter i rummet

Låt $\vec{a}$ och $\vec{b}$ vara vektorer i rummet, och k och l vara positiva reella tal. De negativa talen beaktas i avsnitt 3.3.6. En förlängning eller förkortning av vektorerna $\vec{a}$ och $\vec{b}$ granskas i form av $\vec{A}(k\vec{a}, l\vec{b}) = |k\vec{a}||l\vec{b}| \sin \sphericalangle(k\vec{a}, l\vec{b})\vec{n}_{l\vec{a},k\vec{b}}$. Som redan nämnts, så längden av en vektor inverkar inte på dess riktning och då koefficienterna k och l är positiva kommer de inte att ändra riktningen för vektorerna. Följande kan då skrivas och det här ger upphov till sats 3.12:

$$\begin{aligned}\vec{A}(k\vec{a}, l\vec{b}) =&|k\vec{a}||l\vec{b}| \sin \sphericalangle(k\vec{a}, l\vec{b})\vec{n}_{l\vec{a},k\vec{b}}\\ =&|k||\vec{a}||l||\vec{b}| \sin \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})\vec{n}_{\vec{a},\vec{b}}\\ =&kl|\vec{a}||\vec{b}| \sin \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})\vec{n}_{\vec{a},\vec{b}}\\ =&kl\vec{A}(\vec{a}, \vec{b}).\end{aligned}$$

Sats 3.13. *För alla vektorer $\vec{a}$ och $\vec{b}$ i rummet och positiva reella talen k och l gäller att $\vec{A}(k\vec{a}, l\vec{b}) = kl\vec{A}(\vec{a}, \vec{b})$.*

3.3.5 Kommutativitet i rummet

Låt $\vec{a}$ och $\vec{b}$ vara vektorer i rummet. Sambandet mellan $\vec{A}(\vec{a},\vec{b})$ och $\vec{A}(\vec{b},\vec{a})$ undersöks. Enligt avsnitt 3.1.2 är vinkeln mellan två vektorer den samma oberoende av vilken ordning de skrivs i, $\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = \sphericalangle(\vec{b},\vec{a})$. Högerhandsregeln ger en viss skillnad för $\vec{n}_{\vec{a},\vec{b}}$. Vektorn $\vec{n}_{\vec{b},\vec{a}}$ är motsatt riktad till $\vec{n}_{\vec{a},\vec{b}}$ vilket vi också såg för enhetsvektorerna $\vec{i}, \vec{j}$ och $\vec{k}$ i villkoren 3.9 och därmed är $\vec{n}_{\vec{a},\vec{b}} =$ -$\vec{n}_{\vec{b},\vec{a}}$. Areavektorerna kommer då också att vara motsatt riktade. En härledning följer:

$$\begin{aligned}\vec{A}(\vec{a},\vec{b}) =&|\vec{a}||\vec{b}| \sin \sphericalangle(\vec{a},\vec{b})\vec{n}_{\vec{a},\vec{b}}\\ =&|\vec{b}||\vec{a}| \sin \sphericalangle(\vec{a},\vec{b})\vec{n}_{\vec{a},\vec{b}}\\ =&|\vec{b}||\vec{a}| \sin \sphericalangle(\vec{b},\vec{a})(\text{-}\vec{n}_{\vec{b},\vec{a}})\\ =& \text{-}|\vec{b}||\vec{a}| \sin \sphericalangle(\vec{b},\vec{a})\vec{n}_{\vec{b},\vec{a}}\\ =& \text{-}\vec{A}(\vec{b},\vec{a}).\end{aligned}$$

Areavektorn följder då inte den kommutativa lagen utan den är skev-kommutativ[17].

Sats 3.14. *För alla vektorer $\vec{a}$ och $\vec{b}$ i rummet gäller att $\vec{A}(\vec{a},\vec{b}) = \text{-}\vec{A}(\vec{b},\vec{a})$.*

3.3.6 Motvektorer i rummet

Låt $\vec{a}$ och $\vec{b}$ vara vektorer i rummet. Här granskas sambandet mellan areavektorerna $\vec{A}(\vec{a},\vec{b})$ och $\vec{A}(\text{-}\vec{a},\vec{b})$. Den negativa vektorn -$\vec{u}$ är en vektor som löper i motsatt riktning till $\vec{u}$ och har samma längd som $\vec{u}$. En vinkel α i intervallet $[0, 180°]$ har samma sinusvärde som dess supplementvinkel 180° - α. Vinklarna $\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})$ och $\sphericalangle(\text{-}\vec{a},\vec{b})$ är varandras supplementvinklar, alltså är $\sin \sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = \sin \sphericalangle(\text{-}\vec{a},\vec{b})$. Högerhandsregeln ger igen upphov till en motsatt riktad areavektor då $\vec{n}_{\text{-}\vec{a},\vec{b}}$ och $\vec{n}_{\vec{a},\vec{b}}$ är motsatt riktade. Följande härledning är då motiverad:

$$\begin{aligned}\vec{A}(\text{-}\vec{a},\vec{b}) =&|\text{-}\vec{a}||\vec{b}| \sin \sphericalangle(\text{-}\vec{a},\vec{b})\vec{n}_{\text{-}\vec{a},\vec{b}}\\ =&|\vec{a}||\vec{b}| \sin \sphericalangle(\text{-}\vec{a},\vec{b})\vec{n}_{\text{-}\vec{a},\vec{b}}\\ =&|\vec{a}||\vec{b}| \sin \sphericalangle(\vec{a},\vec{b})(\text{-}\vec{n}_{\vec{a},\vec{b}})\\ =& \text{-}|\vec{a}||\vec{b}| \sin \sphericalangle(\vec{a},\vec{b})\vec{n}_{\vec{a},\vec{b}}\\ =& \text{-}\vec{A}(\vec{a},\vec{b}).\end{aligned}$$

Sats 3.15. *För alla vektorer $\vec{a}$ och $\vec{b}$ i rummet gäller att $\vec{A}(\text{-}\vec{a},\vec{b}) = \text{-}\vec{A}(\vec{a},\vec{b})$.*

Utgående från satserna 3.13 och 3.14 kan man härleda sambandet mellan $\vec{A}(\vec{a},\vec{b})$ och $\vec{A}(\text{-}\vec{a},\text{-}\vec{b})$, och mellan $\vec{A}(\vec{a},\vec{b})$ och $\vec{A}(\vec{a},\text{-}\vec{b})$. De här får bli en övningsuppgift för de intresserade.

3.3.7 Arean för alla parallellogrammer i rummet

Nu finns alla de verktyg som behövs för att beräkna arean för vilken som helst parallellogram som spänns upp av rumsvektorerna $\vec{u}$ och $\vec{v}$. Vektorerna uttrycks i komponentform, $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ och $\vec{v} = d\vec{i} + e\vec{j} + f\vec{k}$ där a, b,, c, d, e och f är vilka som helst reella tal. För att bestämma arean så beräknas först areavektorn $\vec{A}(\vec{u}, \vec{v})$ och det här kommer att göras stegvis med hänvisningar till satser som tagits fram. Areavektorn $\vec{A}(\vec{u}, \vec{v})$ kan till en början skrivas som

$$\vec{A}(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{A}(a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}, d\vec{i} + e\vec{j} + f\vec{k}).$$

Enligt vektordistributiviteten i rummet, sats 3.12, kan man dela upp areavektorn i två areavektorer. Den här satsen kommer att användas två gånger så att det resulterar i tre areavektorer:

$$\vec{A}(a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}, d\vec{i}) + \vec{A}(a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}, e\vec{j}) + \vec{A}(a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}, f\vec{k}).$$

För att vidare skriva det här som ännu flera areavektorer så måste skev-kommutativiteten från sats 3.14 tillämpas. Då man ändrar ordningen på de uppspännande vektorerna kommer areavektorns förtecken att ändras. Det här ger följande uttryck:

$$\text{-}\vec{A}(d\vec{i}, a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}) \text{ - } \vec{A}(e\vec{j}, a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}) \text{ - } \vec{A}(f\vec{k}, a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}).$$

Här tillämpas sats 3.12 två gånger på alla termer, vilket resulterar i följande nio areavektorer:

$$\begin{aligned}
\text{-}\vec{A}(d\vec{i}, a\vec{i}) \text{ - } \vec{A}(d\vec{i}, b\vec{j}) \text{ - } \vec{A}(d\vec{i}, c\vec{k})\\
\text{-}\vec{A}(e\vec{j}, a\vec{i}) \text{ - } \vec{A}(e\vec{j}, b\vec{j}) \text{ - } \vec{A}(e\vec{j}, c\vec{k})\\
\text{-}\vec{A}(f\vec{k}, a\vec{i}) \text{ - } \vec{A}(f\vec{k}, b\vec{j}) \text{ - } \vec{A}(f\vec{k}, c\vec{k}).
\end{aligned}$$

Flyttningsregeln för koefficienter, sats 3.13, tillåter att plocka enhetsvektorernas koefficienter till koefficienter för areavektorn. På grund av sats 3.15 för motvektorerna kan också något av de reella talen vara negativa utan att det leder till flera olika fall som behöver granskas. Till nästa skrivs då

$$\begin{aligned}
\text{-}da\vec{A}(\vec{i}, \vec{i}) \text{ - } db\vec{A}(\vec{i}, \vec{j}) \text{ - } dc\vec{A}(\vec{i}, \vec{k})\\
\text{- } ea\vec{A}(\vec{j}, \vec{i}) \text{ - } eb\vec{A}(\vec{j}, \vec{j}) \text{ - } ec\vec{A}(\vec{j}, \vec{k})\\
\text{- } fa\vec{A}(\vec{k}, \vec{i}) \text{ - } fb\vec{A}(\vec{k}, \vec{j}) \text{ - } fc\vec{A}(\vec{k}, \vec{k}).
\end{aligned}$$

Kunskapen om areavektorer som spänns upp av endast två av enhetsvektorer $\vec{i}, \vec{j}$ och $\vec{k}$ används. Se sammanställningen i slutet av del 3.3.2 (Areaberäkning för parallellogrammer i rummet). Den triviala regeln $\vec{A}(\vec{x}, \vec{x}) = 0$ beaktas också och följande steg kan skivas:

$$-db \cdot \vec{k} - dc \cdot (-\vec{j}) - ea \cdot (-\vec{k}) - ec \cdot \vec{i} - fa \cdot \vec{j} - fb \cdot (-\vec{i}) =$$
$$-db\vec{k} + dc\vec{j} + ea\vec{k} - ec\vec{i} - fa\vec{j} + fb\vec{i}.$$

Efter omgruppering och utbrytning fås det slutliga uttrycket för areavektorn:

$$(fb - ec)\vec{i} + (dc - fa)\vec{j} + (ea - db)\vec{k}. \tag{3.16}$$

Längden av den här vektorn kommer att vara arean för parallellogrammen som spänns upp av vektorerna $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ och $\vec{v} = d\vec{i} + e\vec{j} + f\vec{k}$.

3.3.8 Kryssprodukten

Det som i det här arbetet kallats för areavektorn, $\vec{A}(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}||\vec{b}| \sin \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})\vec{n}$, är bättre känd som kryssprodukten av två vektorer, $\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \sin \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})\vec{n}$. Kryssprodukten går också under namnet vektorprodukt. Härledningen för alla parallellogrammer i rummet i föregående avsnitt ser kanske jobbigt ut, men den är faktiskt ett bevis för varför bestämning av kryssprodukten med hjälp av en determinant kan användas. Man bestämmer kryssprodukten med determinant för samma vektorer som i föregående avsnitt enligt följande. I ett 3x3 fält skrivs enhetsvektorerna i första raden, den förstnämnda vektorns koefficienter i andra raden och den andra vektorns koefficienter i tredje raden. Koefficienterna ska vara så att enhetsvektorernas koefficienter kommer att komma under motsvarande enhetsvektor:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix}$$

Man kan sedan lösa determinanten på olika sätt. Det sätt som för mig är mest bekant, är att kopiera kolumnen som börjar med $\vec{i}$ direkt till höger om $\vec{k}$-kolumnen och sedan kopieras $\vec{j}$-kolumnen till höger om den nyss skrivna $\vec{i}$-kolumnen, enligt följande:

$$\left| \begin{array}{ccc|cc} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} & \vec{i} & \vec{j} \\ a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \end{array} \right.$$

Som nästa steg multipliceras diagonalt en enhetsvektor med två koefficienter. Det här görs för alla diagonaler och produkterna adderas så att diagonaler som löper i riktningen höger/ner ($\searrow$) får positivt förtecken och de som löper vänster/ner($\swarrow$) får negativt förtecken. Det här ger följande resultat som ännu bearbetas med omgruppering och utbrytning:

$$bf\vec{i} + cd\vec{j} + ae\vec{k} - bd\vec{k} - ce\vec{i} - af\vec{j} = (bf - ce)\vec{i} + (cd - af)\vec{j} + (ae - bd)\vec{k}.$$

Ordningen på koefficienterna ändras och då erhålls samma vektor som i föregående avsnitt, alltså

$$(fb - ec)\vec{i} + (dc - fa)\vec{j} + (ea - db)\vec{k}.$$

Kapitel 4

Undervisningspaket

Utgående från härledningen i kapitel 3 har jag gjort ett undervisningspaket som är en konstruktivistisk stig för studeranden. Strukturen och tanken är samma som i föregående kapitel, men den stora skillnaden är att en del av informationen är inbakat i övningsuppgifter. Det här för att studerande ska med aktivt arbete hitta själv kunskapen. Övningsuppgifterna kommer efterhand och det är viktigt att man löser uppgifterna för att förstå helheten. Lösningarna till övningsuppgifterna är presenterade i kapitel 5 och även lösningarna har en central roll på stigen. Då undervisningspaketet är gjort utgående från härledningen kan det kännas som en upprepning, men undervisningspaketet tillsammans med lösningarna ska beaktas som en egen helhet. Studerande ska kunna jobba med undervisningspaketet självständigt eller med stöd av en handledare.

4.1 Enhetsvektorer och högerhandsregeln

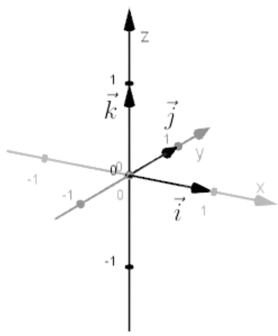
I planet behövs det två enhetsvektorer för att uttrycka alla vektorer. De kallas $\vec{i}$ och $\vec{j}$, och har följande egenskaper. Längden av båda enhetsvektorer är ett, $\vec{i}$ löper i x-axelns positiva riktning och $\vec{j}$ löper i y-axelns positiva riktning. Koordinataxlarna x och y är vinkelräta mot varandra, alltså är också $\vec{i}$ och $\vec{j}$ vinkelräta mot varandra. I rummet finns en dimension till varför vi behöver ytterligare en koordinataxel, z-axeln. Motsvarande enhetsvektor betecknas med $\vec{k}$. Enhetsvektorn $\vec{k}$ är vinkelrät mot både $\vec{i}$ och $\vec{j}$. (figur4.1). Sammanfattningsvis kan skrivas att:

$$|\vec{i}| = 1 \qquad |\vec{j}| = 1 \qquad |\vec{k}| = 1 \qquad \vec{i} \perp \vec{j} \qquad \vec{k} \perp \vec{i} \qquad \vec{k} \perp \vec{j}.$$

Det kartesiska koordinatsystemet i rummet är uppbyggt som ett högerhandssystem och följer högerhandsregeln. Med den regeln kan man lätt bestämma de positiva riktningarna för alla tre axlar. Högerhandsregeln används så att man sträcker den högra handens pekfinger rakt fram, vänder långfingret så att den bildar en rät vinkel med pekfingret och lyfter tummen så att den är vinkelrät mot både pekfingret och långfingret. Pekfingret visar x-axelns positiva riktning, långfingret y-axelns positiva riktning och tummen z-axelns positiva riktning. Enhetsvektorerna $\vec{i}, \vec{j}$ och $\vec{k}$ följer också högerhandsregeln. Öva att använda högerhandsregeln med följande uppgifter:

Övningsuppgift 1. Bestäm riktningen för tummen ifall: (Använd Figur 4.1.)
a)Pekfingret är i positiv x-riktning och långfingret i positiv y-riktning.
b)Pekfingret är i positiv y-riktning och långfingret i positiv x-riktning.
c)Pekfingret är i positiv y-riktning och långfingret i positiv z-riktning.
d)Pekfingret är i negativ z-riktning och långfingret i positiv y-riktning.

Övningsuppgift 2. Hur skulle svaren bli i övningsuppgift 1 ifall man använde den vänstra handen istället för den högra?

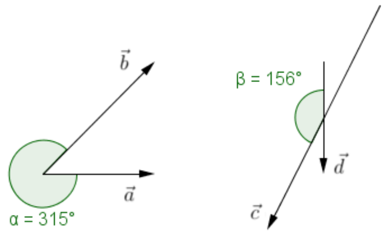


Figur 4.1: Koordinataxlarna och vektorerna $\vec{i}, \vec{j}$ och $\vec{k}$ i rummet.

4.2 Vinkeln mellan två vektorer

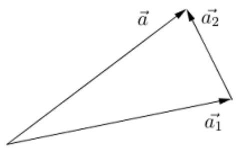
Då två vektorer skär varandra eller startar från samma punkt bildar de två vinklar. Den vinkel som kallas för vinkeln mellan två vektorer är den som är större än $0°$ och mindre än $180°$ och bildas då vektorerna flyttas så att de börjar från samma punkt. Symbolen som används för vinkeln mellan vektorerna $\vec{a}$ och $\vec{b}$ är $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$.

Övningsuppgift 3. Bestäm vinkeln mellan vektorerna $\vec{a}$ och $\vec{b}$, och mellan $\vec{c}$ och $\vec{d}$.



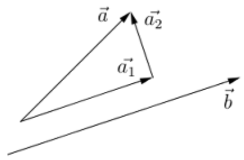
4.3 Vektorprojektion

Två typer av vektorprojektion förekommer i det här undervisningspaketet. Skillnaden mellan de här två är endast i det som vektorerna blir projicerade på. Vektorprojektionen grundar sig på addition av vektorer där man kan dela in en vektor i två komponenter. Vektorn $\vec{a}$ kan skrivas som en summa $\vec{a} = \vec{a_1} + \vec{a_2}$ förutsatt att vektorn $\vec{a_1}$ har samma utgångspunkt som $\vec{a}$ och $\vec{a_2}$ börjar där $\vec{a_1}$ slutar. Vektorn $\vec{a_2}$ måste ännu ha samma ändpunkt som $\vec{a}$(figur 4.2).



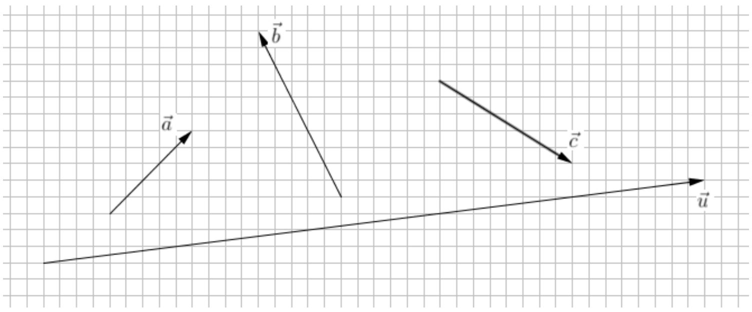
Figur 4.2: Indelning av vektorn $\vec{a}$ i komponenterna $\vec{a_1}$ och $\vec{a_2}$.

Första typen av vektorprojektion är då en vektor projiceras på en annan vektor. Vektorn $\vec{a}$ projiceras på vektorn $\vec{b}$. Vektorn $\vec{a}$ delas in i två komponenter, där $\vec{a_1}$ är parallell med vektorn $\vec{b}$ och $\vec{a_2}$ är vinkelrät mot $\vec{b}$. Den komponent som är parallell med $\vec{b}$, alltså $\vec{a_1}$, kallas för vektorns $\vec{a}$ projektionsvektor på vektorn $\vec{b}$(Figur 4.3).

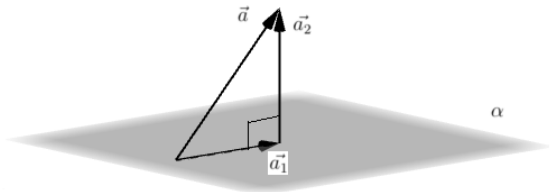


Figur 4.3: Projicering av vektorn $\vec{a}$ på $\vec{b}$.

Övningsuppgift 4. Komponentindela vektorerna $\vec{a}$, $\vec{b}$ och $\vec{c}$ så att den ena komponenten är projektionsvektorn på $\vec{u}$.



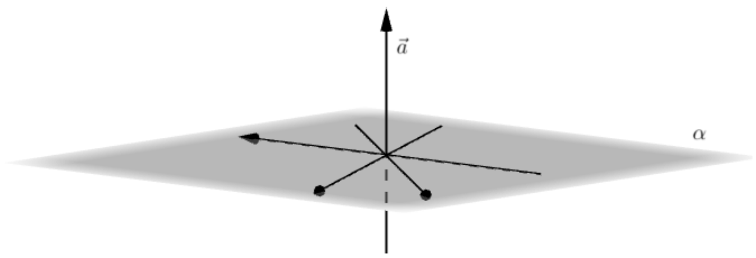
Vektorer kan också projiceras på plan. En vektor som projiceras på ett plan kommer som i föregående stycke att delas in i två komponenter. Den ena komponenten kommer att löpa i samma riktning som planet och den andra vinkelrätt mot planet. Den komponent som löper i samma riktning som planet är projektionsvektorn.



Figur 4.4: Projicering av vektorn $\vec{a}$ på planet α.

4.4 Normalplan

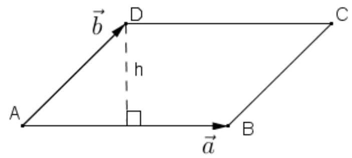
Ett normalplan α till vektorn $\vec{a}$ är ett sådant plan där alla vektorer som ligger i planet är vinkelräta mot vektorn $\vec{a}$.



Figur 4.5: Tre vektorer som ligger i normalplanet α till vektorn $\vec{a}$.

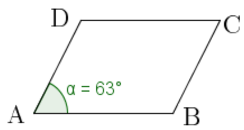
4.5 Area av en parallellogram i planet

Arean av parallellogrammer har en central roll i det här undervisningspaketet. Arean A för en parallellogram bestäms med formeln $A = x \cdot h$, där x är längden av basen och h är längden av höjden. Höjden är det vinkelräta avståndet från basen till den motstående sidan eller dess förlängning. I en parallellogram är motstående sidor alltid lika långa och parallella och därför räcker det med två vektorer för att ange parallellogrammen. Vi säger att två vektorer *spänner upp parallellogrammen* som i figur 4.6 nedan.



Figur 4.6: Parallellogrammen ABCD som spänns upp av vektorerna $\vec{a}$ och $\vec{b}$.

Övningsuppgift 5. Bestäm arean för parallellogrammen ABCD då AB har längden 3,0 och AD har längden 2,5.



Arean för en parallellogram som spänns upp av vektorerna $\vec{a}$ och $\vec{b}$ symboliseras som $A(\vec{a}, \vec{b})$ och ett allmänt uttryck för arean får vi i följande övningsuppgift.

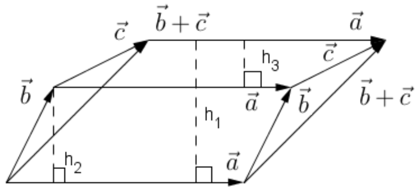
Övningsuppgift 6. Längden av vektorn $\vec{u}$ skrivs som $|\vec{u}|$ och vinkeln mellan vektorerna $\vec{u}$ och $\vec{v}$ symboliseras som $\sphericalangle(\vec{u}, \vec{v})$. Bestäm ett allmänt uttryck för arean av en parallellogram som spänns upp av vektorerna $\vec{a}$ och $\vec{b}$.(Figur 4.6)

Granska i modellösningarna att svaret i uppgift 6 är rätt. Nu har vi fått ett uttryck för hur man beräknar parallellogrammernas area då parallellogrammerna uttrycks med två vektorer. Den här räkneregeln har en del egenskaper som bör bevisas. Bevisen kommer som övningsuppgifter efter ett exempel på hur man kan bevisa en av satserna. Försök först göra bevisen utan att använda stöd av det som är uppräknade direkt efter. Listan har ingen bestämd ordning.

Sats 4.1. *$A(\vec{a}, \vec{b} + \vec{c}) = A(\vec{a}, \vec{b}) + A(\vec{a}, \vec{c})$ förutsatt att $\vec{b}$ och $\vec{c}$ är båda riktade så att deras summavektors spets är längre bort från basen eller basens förlängning än de individuella vektorernas spetsar är från basen eller basens förlängning.*

Exempel 4.2. Bevis för sats 4.1.

Vektorerna $\vec{a}$ och $\vec{b}$ spänner upp en parallellogram med höjden $h_2 = |\vec{b}| \sin \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$, vektorerna $\vec{a}$ och $\vec{c}$ spänner upp en parallellogram med höjden $h_3 = |\vec{c}| \sin \sphericalangle(\vec{a}, \vec{c})$ och vektorn $\vec{a}$ och summavektorn $\vec{b} + \vec{c}$ spänner upp parallellogrammen med höjden $h_1 = |\vec{b} + \vec{c}| \sin \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b} + \vec{c})$. Höjden h_1 kan skrivas som summan av höjderna h_2 och h_3(figur 4.7) och därmed är



Figur 4.7: Paralellogrammerna som spänns upp av $\vec{a}$ och $\vec{b}$, av $\vec{a}$ och $\vec{c}$ och av $\vec{a}$ och $\vec{b}+\vec{c}$

$$\begin{aligned} A(\vec{a},\vec{b}+\vec{c}) =& |\vec{a}||\vec{b}+\vec{c}|\sin\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}+\vec{c}) \\ =& |\vec{a}|h_1 \\ =& |\vec{a}|(h_2+h_3) \\ =& |\vec{a}|h_2+|\vec{a}|h_3 \\ =& |\vec{a}||\vec{b}|\sin\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})+|\vec{a}||\vec{c}|\sin\sphericalangle(\vec{a},\vec{c}) \\ =& A(\vec{a},\vec{b})+A(\vec{a},\vec{c}). \quad \square \end{aligned}$$

Sats 4.3. *$A(\vec{a},\vec{b}) = A(\vec{b},\vec{a})$ för alla vektorer $\vec{a}$ och $\vec{b}$ i planet.*

Övningsuppgift 7. Bevisa sats 4.3.

Sats 4.4. *För alla vektorer $\vec{a}$ och $\vec{b}$ i planet är $A(k\vec{a},l\vec{b}) = klA(\vec{a},\vec{b})$, då $k,l \geq 0$.*

Övningsuppgift 8. Bevisa sats 4.4.

Sats 4.5. *$A(\text{-}\vec{a},\vec{b}) = A(\vec{a},\vec{b})$ för alla vektorer $\vec{a}$ och $\vec{b}$ i planet.*

Övningsuppgift 9. Bevisa sats 4.5.

Sats 4.6. $A(\vec{i},\vec{j}) = 1.$

Övningsuppgift 10. Bevisa sats 4.6.

Sats 4.7. *Då $\vec{a}$ och $\vec{b}$ är parallella är $A(\vec{a},\vec{b}) = 0$.*

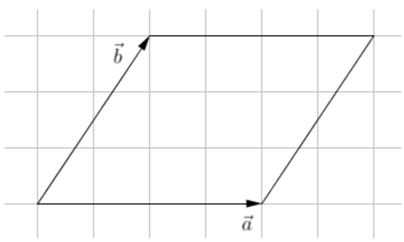
Övningsuppgift 11. Bevisa sats 4.7.

Hjälp till övningsuppgifterna 7-11:

1. Längden av en vektor inverkar inte på dess riktning.
2. $\sin 0° = 0$.
3. $\sphericalangle(-\vec{a},\vec{b}) = 180°$ - $\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})$.
4. $\sin 90° = 1$.
5. $\sin\alpha = \sin(180°$ - $\alpha)$.
6. $\sin 180° = 0$.
7. $\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = \sphericalangle(\vec{b},\vec{a})$.

Övningsuppgift 12. Förenkla så långt som möjligt uttrycket för arean av parallellogrammen som spänns upp av vektorerna $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$ och $\vec{v} = c\vec{i} + d\vec{j}$. Använd satserna ovan.

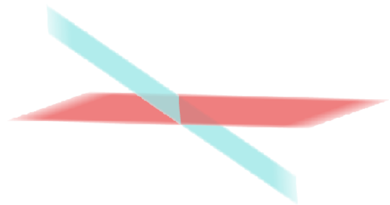
Övningsuppgift 13. Räkna arean av parallellogrammen som spänns upp av vektorerna $\vec{a} = 4\vec{i}$ och $\vec{b} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ på det givna sättet.
a)Räkna rutor i bilden nedan.
b)Använda formeln för $A(\vec{a},\vec{b})$.
c)Använda svaret i övningsuppgift 12.



4.6 Areaberäkning för parallellogrammer i rummet

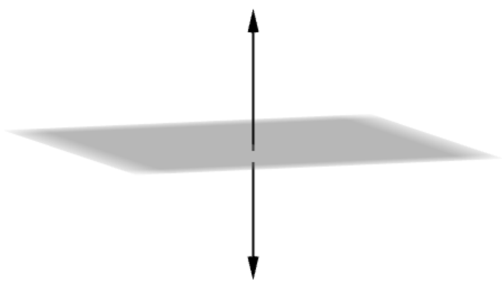
Övningsuppgift 14. Bestäm arean för en parallellogram som spänns upp av vektorerna $\vec{i}$ och $\vec{j}+\vec{k}$
a)genom att använda $A(\vec{a},\vec{b}+\vec{c}) = A(\vec{a},\vec{b}) + A(\vec{a},\vec{c})$.
b)utan att använda $A(\vec{a},\vec{b}+\vec{c}) = A(\vec{a},\vec{b}) + A(\vec{a},\vec{c})$.

En regel som bevisligen gällde i planet gäller inte i rummet. Orsaken till det här är att parallellogrammerna kan ha olika riktningar. Riktningen måste beaktas och det kommer att vara utgångspunkten för areaberäkningen i rummet.



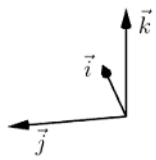
Figur 4.8: Två plan som skär varandra i rummet.

Normalen till en yta anger ytans riktning. Parallellogrammen kommer att symboliseras med en normal som är lika lång som storleken av ifrågavarande parallellogrammens area. Låt en parallellogram spännas upp av enhetsvektorerna $\vec{i}$ och $\vec{j}$. Enhetsvektorerna $\vec{i}$ och $\vec{j}$ ligger vinkelrätt mot varandra och deras längder är 1. Parallellogrammen i frågan är en kvadrat med arean $A = 1 \cdot 1 = 1$. En yta har två normaler(figur 4.9) och vilken som väljs bör först fastslås. Synvinkeln på vektorerna väljs så att den förstnämnda vektorn



Figur 4.9: Två normaler till ett plan.

löper framåt och den andra vektorn utgår ifrån samma punkt och bildar en vinkel som är mindre än 180°. I det här fallet kommer den andra vektorn att löpa åt vänster. Normalen som används är den som löper rakt uppåt. Högerhandsregeln är ett viktigt verktyg här. Nu är tanken den, att pekfingret går i den riktningen som den förstnämnda vektorn och långfingret i riktningen för den andra vektorn. Tummen kommer att visa riktningen för normalen. Då man beaktar vektorerna $\vec{i}$ och $\vec{j}$ i den ordningen kommer normalen att vara i samma riktning som enhetsvektorn $\vec{k}$(Figur 4.10). Arean av parallellogrammen var 1 så det ger att normalvektorn faktiskt kommer att vara $1 \cdot \vec{k} = \vec{k}$. Normalvektorn som har samma längd som storleken av parallellogrammens area kommer att kallas för *areavektor*.



Figur 4.10: Normalvektorn som bildas då parallellogrammen spänns upp av $\vec{i}$ och $\vec{j}$.

Definition 1. Areavektorn för två givna vektorer är den entydigt bestämda vektorn som uppfyller följande villkor:

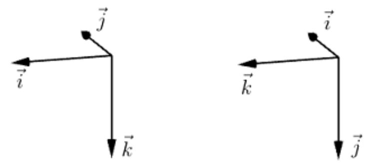
1. Längden av areavektorn är lika lång som arean av den parallellogram som vektorerna spänner upp.
2. Areavektorn är vinkelrät mot de båda vektorerna.
3. Areavektorn följer högerhandsregeln så att den antar riktningen för tummen, då den förstnämnda vektorn är i pekfingrets riktning och den andra i långfingret riktning.

Övningsuppgift 15. Vilken är areavektorn av följande enhetsvektorer? Beakta ordningen och använd högerhandsregeln. Använd figur 4.10 och 4.11 som hjälp.

1. $\vec{i}, \vec{j}$ ger $\underline{\vec{k}}$ 2. $\vec{j}, \vec{i}$ ger_ 3. $\vec{i}, \vec{k}$ ger_

4. $\vec{k}, \vec{i}$ ger_ 5. $\vec{j}, \vec{k}$ ger_ 6. $\vec{k}, \vec{j}$ ger_

Övningsuppgift 16. Vilken areavektor fås då de uppspännande vektorerna är en och samma vektor.



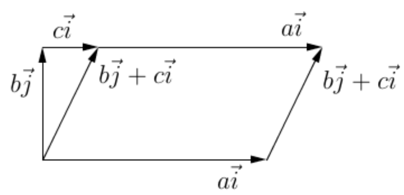
Figur 4.11: Enhetsvektorerna presenterade ur olika synvinklar.

Övningsuppgift 17. Anta att a och b är positiva reella tal. Hur skiljer sig areavektorn som spänns upp av $\vec{i}$ och $\vec{j}$ från areavektorn som spänns upp av $a\vec{i}$ och $b\vec{j}$. Rita och beakta storleken samt riktningen.

De parallellogrammer som hittills granskats i det här avsnittet har spänts upp av endast vektorer i samma riktning som enhetsvektorerna $\vec{i}, \vec{j}$ eller $\vec{k}$. Vektorer kan också anta andra riktningar och då betraktas de som summavektorer. Det simpla fallet där parallellogrammen spänns upp av $a\vec{i}$ och $b\vec{j}+c\vec{i}$ där a, b och c är positiva reella tal, kommer att inleda granskningen med summavektorerna. Summavektorn är ovanligt skrivet med $\vec{j}$ komponenten före $\vec{i}$ för att bilden(figur 4.12) av fallet ska vara mera begriplig. I det här fallet fås också en parallellogram och arean av parallellogrammen beräknas med basen multiplicerat med höjden. För att repetera så är höjden det vinkelräta avståndet från basen till motstående bas, eller dess förlängning. Enligt figur 4.12 är höjden samma som vektorn $b\vec{j}$. Då blir arean av parallellogrammen ab och areavektorn $ab\vec{k}$. De parallella komponenterna till den förstnämnda vektorn som spänner upp parallellogrammen kommer inte att inverka på arean och därmed inte heller på areavektorn.

Övningsuppgift 18. Rita vektorerna $\vec{a} = 4\vec{i}$ och $\vec{b} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$ och bestäm areavektorn som vektorerna spänner upp.

Övningsuppgift 19. Rita vektorerna $\vec{a} = 5\vec{k}$ och $\vec{b} = 3\vec{j} + 4\vec{k}$ och bestäm areavektorn som vektorerna spänner upp.



Figur 4.12: Parallellogram som spänns upp av vektorerna $a\vec{i}$ och $b\vec{j} + c\vec{i}$.

Som följande fall granskas parallellogrammen som spänns upp av $a\vec{i}$ och summavektorn $b\vec{j}+c\vec{k}+d\vec{i}$, där a, b, c och d är positiva reella tal. Nu finns det igen en komponent som är parallell med den förstnämnda uppspännande vektorn. Man behöver inte beakta den. De återstående komponenterna, $b\vec{j}$ och $c\vec{k}$ är vinkelräta mot varandra och dess summavektors längd kan lätt beräknas med Pythagoras sats.

Övningsuppgift 20. Bestäm arean för parallellogrammen vars närliggande sidor är $\vec{a} = 2\vec{i}$ och $\vec{b} = 5\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}$.

Vid granskningen av fallen då de båda uppspännande vektorerna är summavektorer beaktas ett allmänt fall. Låt vektorerna $\vec{a}$ och $\vec{b}$ spänna upp en parallellogram i rummet. Då vi konstaterat att de komponenter som är parallella med den förstnämnda inte behöver beaktas, skrivs vektorn utgående från vektorprojektion som $\vec{b} = \vec{b}_{\vec{a}} + \vec{b}_\alpha$, där $\vec{b}_{\vec{a}}$ är parallell med och $\vec{b}_\alpha$ är vinkelrät mot $\vec{a}$. Arean av parallellogrammen är då $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}_\alpha|$. Med hjälp av trigonometri kan längden av $\vec{b}_\alpha$ skriva som $\sin\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) \cdot \vec{b}$.

Övningsuppgift 21. Rita en bild och motivera föregående mening.

Areavektorn bör vara vinkelrät mot både $\vec{a}$ och $\vec{b}$. Beteckningen $\vec{n}_{\vec{a},\vec{b}}$ betyder enhetsvektorn som är vinkelrät mot både $\vec{a}$ och $\vec{b}$, och följer högerhandsregeln. Nu kan areavektorn skrivas som $|\vec{a}||\vec{b}|\sin\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})\vec{n}_{\vec{a},\vec{b}}$. Härefter används symbolen $\vec{A}(\vec{a},\vec{b})$ för areavektorn och den beräknas med uttrycket

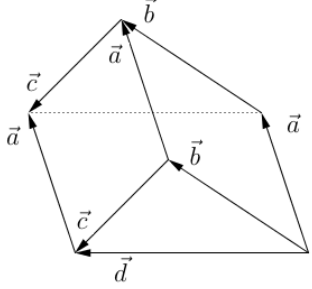
$$\vec{A}(\vec{a},\vec{b}) = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})\vec{n}, \tag{4.8}$$

där $\vec{n}$ är en förenkling av $\vec{n}_{\vec{a},\vec{b}}$. För enhetsvektorerna kan då skrivas:

$$\vec{A}(\vec{i},\vec{j}) = \vec{k} \qquad \vec{A}(\vec{k},\vec{i}) = \vec{j} \qquad \vec{A}(\vec{j},\vec{k}) = \vec{i}$$

$$\vec{A}(\vec{j},\vec{i}) = -\vec{k} \qquad \vec{A}(\vec{i},\vec{k}) = -\vec{j} \qquad \vec{A}(\vec{k},\vec{j}) = -\vec{i}.$$

Då planets sats 4.1 $(A(\vec{a},\vec{b}+\vec{c}) = A(\vec{a},\vec{b}) + A(\vec{a},\vec{c}))$ inte gäller i rummet kommer den att vara utgångspunkten för följande härledning. Låt vektorerna $\vec{a},\vec{b}$ och $\vec{c}$ vara vektorer i rummet. Vektorerna flyttas så, att $\vec{a}$ och $\vec{b}$ utgår ifrån samma punkt, och $\vec{c}$ börjar där $\vec{b}$ slutar. Vektorerna spänner upp ett prisma där prismats ena sida är en triangel med sidorna $\vec{b},\vec{c}$ och summavektorn $\vec{b}+\vec{c}$. Summavektorn får namnet $\vec{d}$ (Figur 4.13). Triangeln längst mot läsaren kallas för prismats bas. Tre av sidorna i prismat är parallellogrammer och respektive parallellogram spänns upp av vektorerna $\vec{a}$ och $\vec{b}$, $\vec{a}$ och $\vec{c}$ och den tredje av $\vec{a}$ och summavektorn $\vec{d}$.



Figur 4.13: Ett prisma som spänns upp av rumsvektorerna $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ och $\vec{d}$.

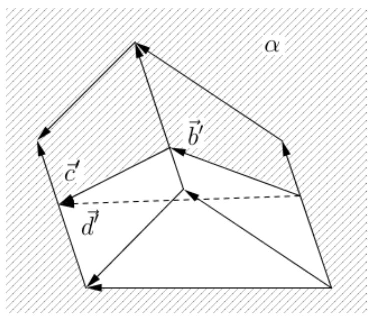
Vektorn $\vec{a}$ antas vara basen för alla tre parallellogrammer och $\vec{b}, \vec{c}$ och summavektorn $\vec{d}$ projiceras på normalplanet α till $\vec{a}$. Det här ger projektionsvektorerna

$$\vec{b}' = |\vec{b}| \sin \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) \vec{b}_\alpha,$$

$$\vec{c}' = |\vec{c}| \sin \sphericalangle(\vec{a}, \vec{c}) \vec{c}_\alpha$$

och

$$\vec{d}' = |\vec{d}| \sin \sphericalangle(\vec{a}, \vec{d}) \vec{d}_\alpha.$$



Figur 4.14: Projektionsvektorerna $\vec{b}', \vec{c}'$ och $\vec{d}'$ på normalplanet α i samma prisma som i figur 4.13

Då projektionsvektorerna ligger i normalplanet α, är de alla vinkelräta mot vektorn $\vec{a}$ som är vald till basen av parallellogrammerna. Projektionsvektorerna är då lika långa som höjden i de respektive parallellogrammerna. Projektionsvektorerna ligger i ett och samma plan och enligt figur 4.14 så gäller sambandet $\vec{b}' + \vec{c}' = \vec{d}'$ som bildar en projektion av basen i prismat på normalplanet α.

Riktningen av ett plan anges med normalen till planet. Projektionsvektorerna roteras 90° medsols då synpunkten är längs basvektorn i respektive parallellogram. Det här ger normalvektorerna $\vec{b}_n, \vec{c}_n$ och $\vec{d}_n$ för vilka det också gäller $\vec{b}_n + \vec{c}_n = \vec{d}_n$. Nu är

$$\vec{b}_n = |\vec{b}| \sin \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) \vec{n}_{\vec{a},\vec{b}},$$

$$\vec{c}_n = |\vec{c}| \sin \sphericalangle(\vec{a}, \vec{c}) \vec{n}_{\vec{a},\vec{c}}$$

och

$$\vec{d}_n = |\vec{d}| \sin \sphericalangle(\vec{a}, \vec{d}) \vec{n}_{\vec{a},\vec{d}}$$

där beteckningen $\vec{n}_{\vec{x}\vec{y}}$ står för en vektor som är vinkelrät mot $\vec{x}$ och $\vec{y}$ och har längden 1. Vektorn $\vec{n}_{\vec{x}\vec{y}}$ bör ännu följa högerhandsregeln för att vara säker på vilken av de två normalerna det är frågan om.

Övningsuppgift 22. Rita tre vektorer så att den ena vektorn är en summavektor av de två andra. Rita normalen till alla vektorer så att de har samma längd som själva vektorn och att de är roterade 90° medsols. Flytta normalerna så att de bildar en likadan triangel som den ursprungliga triangeln.

Enligt likformigheten kan båda leden i $\vec{b}_n + \vec{c}_n = \vec{d}_n$ multipliceras med längden av $\vec{a}$ vilket ger $|\vec{a}|\vec{b}_n + |\vec{a}|\vec{c}_n = |\vec{a}|\vec{d}_n$ och därmed kan skrivas som

$$|\vec{a}||\vec{b}| \sin \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) \vec{n}_{\vec{a},\vec{b}} + |\vec{a}||\vec{c}| \sin \sphericalangle(\vec{a}, \vec{c}) \vec{n}_{\vec{a},\vec{c}} = |\vec{a}||\vec{d}| \sin \sphericalangle(\vec{a}, \vec{d}) \vec{n}_{\vec{a},\vec{d}}.$$

Här identifieras uttrycket för areavektorn och då kan vi skriva:

$$\vec{A}(\vec{a}, \vec{b}) + \vec{A}(\vec{a}, \vec{c}) = \vec{A}(\vec{a}, \vec{d}) = \vec{A}(\vec{a}, \vec{b} + \vec{c}).$$

Sats 4.9. *För alla vektorer $\vec{a}, \vec{b}$ och $\vec{c}$ i rummet gäller att $\vec{A}(\vec{a}, \vec{b}) + \vec{A}(\vec{a}, \vec{c}) = \vec{A}(\vec{a}, \vec{b} + \vec{c})$.*

Areavektorn $\vec{A}(\vec{a}, \vec{b})$ har ytterligare några egenskaper som bör granskas. Vi börjar med ett exempel där en av satserna bevisas. Bevisen för resten av satserna är som övningsuppgifter. Det skulle vara bäst ifall man gjorde utan hjälpen, men ifall det behövs så finns det listat hjälp direkt efter satserna.

Sats 4.10. *För alla vektorer $\vec{a}, \vec{b}$ i rummet och positiva tal $k, l \in R$ gäller att $\vec{A}(k\vec{a}, l\vec{b}) = kl\vec{A}(\vec{a}, \vec{b})$.*

Exempel 4.11. Bevis för sats 4.9.

Längden av en vektor inverkar inte på dess riktning och då koefficienterna k och l är positiva kommer inte de att ändra riktningen för vektorerna.

$$\begin{aligned}\vec{A}(k\vec{a}, l\vec{b}) =& |k\vec{a}||l\vec{b}| \sin \sphericalangle(k\vec{a}, l\vec{b})\vec{n}_{l\vec{a},k\vec{b}} \\ =& |k||\vec{a}||l||\vec{b}| \sin \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})\vec{n}_{\vec{a},\vec{b}} \\ =& kl|\vec{a}||\vec{b}| \sin \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})\vec{n}_{\vec{a},\vec{b}} \\ =& kl\vec{A}(\vec{a}, \vec{b}). \quad \square\end{aligned}$$

Sats 4.12. *För alla vektorer $\vec{a}$ och $\vec{b}$ i rummet gäller att $\vec{A}(-\vec{a}, \vec{b}) = -\vec{A}(\vec{a}, \vec{b})$.*

Övningsuppgift 23. Bevisa sats 4.11.

Sats 4.13. *För alla vektorer $\vec{a}$ och $\vec{b}$ i rummet gäller att $\vec{A}(\vec{a}, \vec{b}) = -\vec{A}(\vec{b}, \vec{a})$.*

Övningsuppgift 24. Bevisa sats 4.12.

Lista på hjälp:

1. Längden av en vektor inverkar inte på dess riktning.
2. $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \sphericalangle(\vec{b}, \vec{a})$.
3. $\vec{n}_{\vec{a},\vec{b}} = -\vec{n}_{\vec{b},\vec{a}}$.
4. $\sin \alpha = \sin(180° - \alpha)$.
5. $\vec{n}_{-\vec{a},\vec{b}}$ och $\vec{n}_{\vec{a},\vec{b}}$ är motsatt riktade.

Övningsuppgift 25. Använd satserna 4.11 och 4.12 för att ta reda på sambandet mellan $\vec{A}(\vec{a}, \vec{b})$ och $\vec{A}(-\vec{a}, -\vec{b})$, och mellan $\vec{A}(\vec{a}, \vec{b})$ och $\vec{A}(\vec{a}, -\vec{b})$. Rita även bilder och lös med hjälp av högerhandsregeln.

Övningsuppgift 26. Bestäm arean så långt som möjligt för en parallellogram i rummet som spänns upp av vektorerna $\vec{u}$ och $\vec{v}$ där $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ och $\vec{v} = d\vec{i} + e\vec{j} + f\vec{k}$ där a, b, c, d, e och f är reella tal. Använd satserna ovan.

4.7 Kryssprodukten

Det som i det här arbetet kallats för areavektorn, $\vec{A}(\vec{a},\vec{b}) = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})\vec{n}$, är bättre känd som kryssprodukten av två vektorer, $\vec{a}\times\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})\vec{n}$. Kryssprodukten går också under namnet vektorprodukt. Det som gjordes i övningsuppgift 26 var en lång och krävande härledning, men den är viktig. Härledningen är faktiskt ett bevis för varför bestämning av kryssprodukten med hjälp av en determinant kan användas. Man bestämmer kryssprodukten med determinant för samma vektorer som i uppgift 26 enligt följande. I ett 3x3 fält skrivs enhetsvektorerna i första raden, den förstnämnda vektorns koefficienter i andra raden och den andra vektorns koefficienter i tredje raden. Koefficienterna ska vara så att enhetsvektorernas koefficienter kommer att komma under motsvarande enhetsvektor:

$$\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix}$$

Man kan sedan lösa determinanten på olika sätt. Det sätt vi använder, är att kopiera kolumnen som börjar med $\vec{i}$ direkt till höger om $\vec{k}$-kolumnen och sedan kopieras $\vec{j}$- kolumnen till höger om den nyss skrivna $\vec{i}$-kolumnen, enligt följande:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} & \vec{i} & \vec{j} \\ a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \end{array}\right.$$

Som nästa steg multipliceras diagonalt en enhetsvektor med två koefficienter. Det här görs för alla diagonaler och produkterna adderas så att diagonaler som löper i riktningen höger/ner ($\searrow$) får positivt förtecken och de som löper vänster/ner($\swarrow$) får negativt förtecken. Det här ger följande resultat som ännu bearbetas med omgruppering och utbrytning:

$$bf\vec{i} + cd\vec{j} + ae\vec{k} - bd\vec{k} - ce\vec{i} - af\vec{j} = (bf - ce)\vec{i} + (cd - af)\vec{j} + (ae - bd)\vec{k}.$$

Ordningen på koefficienterna ändras och då erhålls samma vektor som i modellösningen för uppgift 26, alltså

$$(fb - ec)\vec{i} + (dc - fa)\vec{j} + (ea - db)\vec{k}.$$

Övningsuppgift 27. Bestäm kryssprodukten $\vec{a}\times\vec{b}$, då $\vec{a} = 2\vec{i} + 1\vec{j} + 4\vec{k}$ och $\vec{b} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 1\vec{k}$.

Övningsuppgift 28. Bestäm storleken av en parallellogram som spänns upp av vektorerna $\vec{a} = -2\vec{i} + 4\vec{k}$ och $\vec{b} = 4\vec{i} + 4\vec{j} + 7\vec{k}$.

Kapitel 5

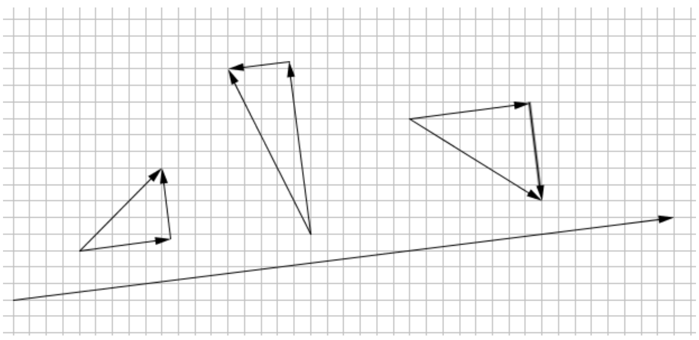
Modellösningar och svar

1. a)positiv z-riktning. b)negativ z-riktning. c)positiv x-riktning. d)positiv x-riktning

2. a)negativ z-riktning. b)positiv z-riktning. c)negativ x-riktning. d)negativ x-riktning

3. $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = 360°$ - $315° = 45°$
   $\sphericalangle(\vec{c}, \vec{d}) = 180°$ - $156° = 24°$

4. Lösningen i bilden nedan.



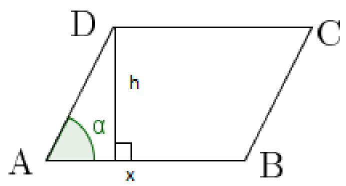
5.

$$\alpha = 63°, \qquad AB = 3,0 = x, \qquad AD = 2,5$$

$$\sin\alpha = \frac{h}{AD} \Leftrightarrow h = AD\sin\alpha$$

$$A = x \cdot h = AB \cdot AD\sin\alpha$$

$$A = 3,0 \cdot 2,5 \cdot \sin 63° \approx 6,7$$



6. Lös på motsvarande sätt som uppgift 5. Svar: $A(\vec{a},\vec{b}) = |\vec{a}||\vec{b}| \sin \sphericalangle(\vec{a},\vec{b})$

7. Vinkeln mellan vektorerna $\vec{a}$ och $\vec{b}$ är samma som vinkeln mellan vektorerna $\vec{b}$ och $\vec{a}$, eller $\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = \sphericalangle(\vec{b},\vec{a})$:

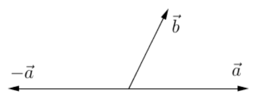
$$\begin{aligned} A(\vec{a},\vec{b}) =& |\vec{a}||\vec{b}| \sin \sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) \\ =& |\vec{b}||\vec{a}| \sin \sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) \\ =& |\vec{b}||\vec{a}| \sin \sphericalangle(\vec{b},\vec{a}) \\ =& A(\vec{b},\vec{a}). \quad \square \end{aligned}$$

8. Längden av en vektor inverkar inte på dess riktning och då $k, l \geq 0$ är:

$$\begin{aligned} A(k\vec{a},l\vec{b}) =& |k\vec{a}||l\vec{b}| \sin \sphericalangle(k\vec{a},l\vec{b}) \\ =& k|\vec{a}|l|\vec{b}| \sin \sphericalangle(k\vec{a},l\vec{b}) \\ =& kl|\vec{a}||\vec{b}| \sin \sphericalangle(k\vec{a},l\vec{b}) \\ =& kl|\vec{a}||\vec{b}| \sin \sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) \\ =& klA(\vec{a},\vec{b}). \quad \square \end{aligned}$$

9. Vektorn -$\vec{a}$ placeras så att den börjar från samma punkt som $\vec{a}$ och $\vec{b}$. Sambandet mellan vinklarna kan tolkas ur bilden och är att $\sphericalangle$(-$\vec{a},\vec{b}$) och $\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})$ är varandras supplementvinklar, alltså gäller $\sphericalangle$(-$\vec{a},\vec{b}$) = 180° - $\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})$. Sinus för en vinkel och dess supplementvinkel ger samma värde, alltså $\sin \alpha = \sin(180° - \alpha)$:

$$
\begin{aligned}
A(\text{-}\vec{a},\vec{b}) =& |\text{-}\vec{a}||\vec{b}| \sin \sphericalangle(\text{-}\vec{a},\vec{b}) \\
=& |\vec{a}||\vec{b}| \sin(180^\circ \text{ - } \sphericalangle(\vec{a},\vec{b})) \\
=& |\vec{a}||\vec{b}| \sin \sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) \\
=& A(\vec{a},\vec{b}). \quad \square
\end{aligned}
$$



10. Vinkeln mellan enhetsvektorerna $\sphericalangle(\vec{i},\vec{j})$ är alltid 90° och $\sin 90^\circ = 1$. Längden av enhetsvektorerna är ett och då är:

$$A(\vec{i},\vec{j}) = |\vec{i}||\vec{j}| \sin \sphericalangle(\vec{i},\vec{j}) = |\vec{i}||\vec{j}| \sin 90^\circ = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1. \quad \square$$

11. Då $\vec{a}$ och $\vec{b}$ är parallella är $\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = 0^\circ$ eller $\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = 180^\circ$. I båda fallen är $\sin \sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = 0$. Det här ger:

$$A(\vec{a},\vec{b}) = |\vec{a}||\vec{b}| \sin \sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = |\vec{a}||\vec{b}| \cdot 0 = 0. \quad \square$$

12. Satsen som används är märkt med satsnumret ovanför likamedstecknet.

$$
\begin{aligned}
A(\vec{u},\vec{v}) =& A(a\vec{i}+b\vec{j}, c\vec{i}+d\vec{j}) \\
\overset{4.1}{=}& A(a\vec{i}+b\vec{j}, c\vec{i}) + A(a\vec{i}+b\vec{j}, d\vec{j}) \\
\overset{4.3;4.1}{=}& A(c\vec{i}, a\vec{i}) + A(c\vec{i}, b\vec{j}) + A(d\vec{j}, a\vec{i}) + A(d\vec{j}, b\vec{j}) \\
\overset{4.3}{=}& caA(\vec{i},\vec{i}) + cbA(\vec{i},\vec{j}) + daA(\vec{j},\vec{i}) + dbA(\vec{j},\vec{j}) \\
\overset{4.6;4.7}{=}& ca \cdot 0 + cb \cdot 1 + da \cdot 1 + db \cdot 0 \\
=& cb + da
\end{aligned}
$$

13. a) 12 rutor
b) $|\vec{a}| = \sqrt{4^2} = 4$, $\qquad |\vec{b}| = \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$, $\qquad \tan \sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = \frac{3}{2}$

$$A(\vec{a},\vec{b}) = |\vec{a}||\vec{b}| \sin \sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = 4 \cdot \sqrt{13} \cdot \sin(\arctan(3/2)) = 12$$

c)$a = 4, \qquad b = 0, \qquad c = 2, \qquad d = 3$

$$A(\vec{a}, \vec{b}) = cb + da = 2 \cdot 0 + 3 \cdot 4 = 12$$

14. a)Enhetsvektorerna $\vec{i}$ och $\vec{j}$ samt $\vec{i}$ och $\vec{k}$ är vinkelräta mot varandra och därför är:

    $A(\vec{i}, \vec{j}+\vec{k}) = A(\vec{i}, \vec{j}) + A(\vec{i}, \vec{k}) = |\vec{i}||\vec{j}| \sin \sphericalangle(\vec{i}, \vec{j}) + |\vec{i}||\vec{k}| \sin \sphericalangle(\vec{i}, \vec{k}) = 1 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 1 = 2$

    b) $|\vec{j} + \vec{k}| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ och $\sphericalangle(\vec{i}, \vec{j} + \vec{k}) = 90°$(alla vektorer som endast har $\vec{j}$ och $\vec{k}$ komponenter ligger i vektorn $\vec{i}$:s normalplan)

    $$A(\vec{i}, \vec{j} + \vec{k}) = |\vec{i}||\vec{j} + \vec{k}| \sin \sphericalangle(\vec{i}, \vec{j} + \vec{k}) = 1 \cdot \sqrt{2} \cdot 1 = \sqrt{2}$$

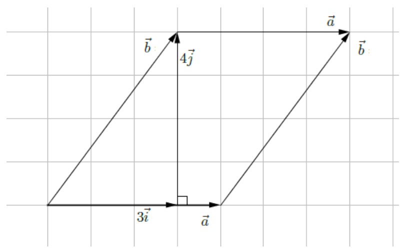
    OBS! Annat svar för a och b.

15. 1.$\vec{i}, \vec{j}$ ger $\vec{k}$.
    2.$\vec{j}, \vec{i}$ ger -$\vec{k}$.
    3.$\vec{i}, \vec{k}$ ger -$\vec{j}$.
    4.$\vec{k}, \vec{i}$ ger $\vec{j}$.
    5.$\vec{j}, \vec{k}$ ger $\vec{i}$.
    6.$\vec{k}, \vec{j}$ ger -$\vec{i}$.

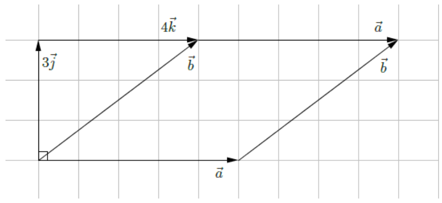
16. Nollvektorn $\vec{0}$

17. Storleken blir $a \cdot b$, men riktningen är samma.

18. Arean av parallellogrammen är: $4 \cdot 4 = 16$
    Riktningen blir enligt högerhandsregeln $\vec{k}$
    Svar: $16\vec{k}$



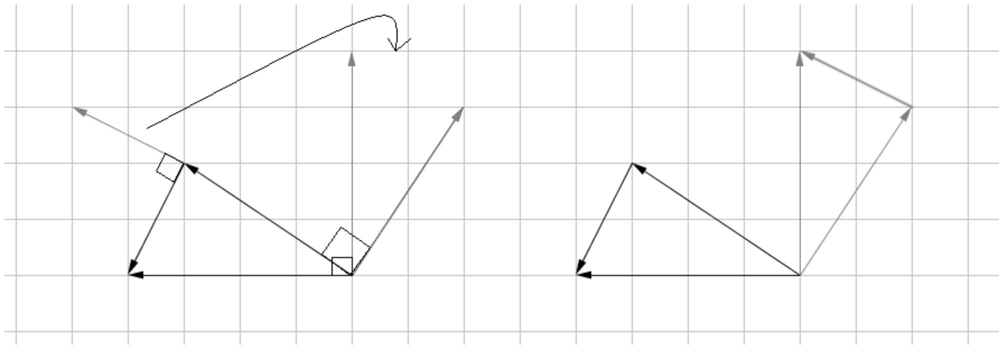
19. Arean av parallellogrammen är: $3 \cdot 5 = 15$
    Riktningen blir enligt högerhandsregeln -$\vec{j}$
    Svar: -$15\vec{i}$



20. I vektorn $\vec{b}$ är komponenten $5\vec{i}$ parallell med vektorn $\vec{a} = 2\vec{i}$. Man behöver inte beakta den. Längden av $4\vec{j} + 3\vec{k}$ är $\sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$. Arean av parallellogrammen blir då $5 \cdot 2 = 10$.
Svar: 10

21. Samma är gjort i uppgift 6 med andra beteckningar.

22. De ljusare vektorerna är normalvektorerna.



23. Låt $\vec{a}$ och $\vec{b}$ vara vektorer i rummet. Den negativa vektorn -$\vec{u}$ är en vektor som löper i motsatt riktning till $\vec{u}$ och har samma längd som $\vec{u}$. En vinkel α i intervallet $[0, 180°]$ har samma sinusvärde som dess supplementvinkel 180° - α. Vinklarna $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$ och $\sphericalangle(\text{-}\vec{a}, \vec{b})$ är varandras supplementvinklar, alltså är $\sin\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \sin\sphericalangle(\text{-}\vec{a}, \vec{b})$. Högerhandsregeln ger igen upphov till en motsatt riktad areavektor då $\vec{n}_{\text{-}\vec{a},\vec{b}}$ och $\vec{n}_{\vec{a},\vec{b}}$ är motsatt riktade. Rita och kontrollera med högerhandsregeln. Följande härledning är då motiverad:

$$\begin{aligned}\vec{A}(\text{-}\vec{a},\vec{b}) =&|\text{-}\vec{a}||\vec{b}|\sin\sphericalangle(\text{-}\vec{a},\vec{b})\vec{n}_{\text{-}\vec{a},\vec{b}}\\ =&|\vec{a}||\vec{b}|\sin\sphericalangle(\text{-}\vec{a},\vec{b})\vec{n}_{\text{-}\vec{a},\vec{b}}\\ =&|\vec{a}||\vec{b}|\sin\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})(\text{-}\vec{n}_{\vec{a},\vec{b}})\\ =&\text{-}|\vec{a}||\vec{b}|\sin\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})\vec{n}_{\vec{a},\vec{b}}\\ =&-\vec{A}(\vec{a},\vec{b}). \quad \square\end{aligned}$$

24. Låt $\vec{a}$ och $\vec{b}$ vara vektorer i rummet. Vinkeln mellan två vektorer den samma oberoende av vilken ordning de skrivs i, $\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = \sphericalangle(\vec{b},\vec{a})$. Högerhandsregeln ger en viss skillnad för $\vec{n}_{\vec{a},\vec{b}}$. Vektorn $\vec{n}_{\vec{b},\vec{a}}$ är motsatt riktad till $\vec{n}_{\vec{a},\vec{b}}$ vilket vi också såg för enhetsvektorerna. Därmed är $\vec{n}_{\vec{a},\vec{b}} = \text{-}\vec{n}_{\vec{b},\vec{a}}$. Areavektorerna kommer då också att vara motsatt riktade:

$$\begin{aligned}\vec{A}(\vec{a},\vec{b}) =&|\vec{a}||\vec{b}|\sin\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})\vec{n}_{\vec{a},\vec{b}}\\ =&|\vec{b}||\vec{a}|\sin\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})\vec{n}_{\vec{a},\vec{b}}\\ =&|\vec{b}||\vec{a}|\sin\sphericalangle(\vec{b},\vec{a})(\text{-}\vec{n}_{\vec{b},\vec{a}})\\ =&\text{-}|\vec{b}||\vec{a}|\sin\sphericalangle(\vec{b},\vec{a})\vec{n}_{\vec{b},\vec{a}}\\ =&-\vec{A}(\vec{b},\vec{a}). \quad \square\end{aligned}$$

Areavektorn följder då inte den kommutativa lagen utan den är skev-kommutativ.

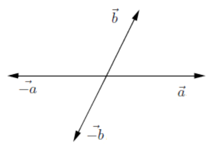
25. Satsen som används är skrivet ovanför likamedstecknet

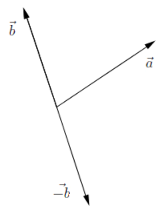
$$\begin{aligned}\vec{A}(\vec{a},\vec{b}) \overset{4.11}{=}&\text{-}\vec{A}(\text{-}\vec{a},\vec{b})\\ \overset{4.12}{=}&\text{-}(\text{-}\vec{A}(\vec{b},\text{-}\vec{a}))\\ =&\vec{A}(\vec{b},\text{-}\vec{a})\\ \overset{4.11}{=}&\text{-}\vec{A}(\text{-}\vec{b},\text{-}\vec{a})\\ \overset{4.12}{=}&\text{-}(\text{-}\vec{A}(\text{-}\vec{a},\text{-}\vec{b}))\\ =&\vec{A}(\text{-}\vec{a},\text{-}\vec{b}).\end{aligned}$$

$\vec{A}(\vec{a},\vec{b})$ och $\vec{A}(\text{-}\vec{a},\text{-}\vec{b})$ är samma areavektor.

$$\begin{aligned}\vec{A}(\vec{a},\vec{b}) &\overset{4.12}{=}\text{-}\vec{A}(\vec{b},\vec{a})\\ &\overset{4.11}{=}\text{-}(\text{-}\vec{A}(\text{-}\vec{b},\vec{a}))\\ &=\vec{A}(\text{-}\vec{b},\vec{a})\\ &\overset{4.11}{=}\text{-}\vec{A}(\vec{a},\text{-}\vec{b}).\end{aligned}$$

$\vec{A}(\vec{a},\vec{b})$ och $\vec{A}(\vec{a},\text{-}\vec{b})$ är motsatt riktade.





26. Satserna och uppgifterna som används står ovanför likamedstecknet.

$$\begin{aligned}\vec{A}(\vec{u},\vec{v}) &=\vec{A}(a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k},d\vec{i}+e\vec{j}+f\vec{k})\\ &\overset{4.8}{=}\vec{A}(a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k},d\vec{i})+\vec{A}(a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k},e\vec{j})+\vec{A}(a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k},f\vec{k})\\ &\overset{4.12}{=}\text{-}\vec{A}(d\vec{i},a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k})\text{ - }\vec{A}(e\vec{j},a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k})\text{ - }\vec{A}(f\vec{k},a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k})\\ &\overset{4.8}{=}\text{-}\vec{A}(d\vec{i},a\vec{i})\text{ - }\vec{A}(d\vec{i},b\vec{j})\text{ - }\vec{A}(d\vec{i},c\vec{k})\\ &\quad\text{-}\vec{A}(e\vec{j},a\vec{i})\text{ - }\vec{A}(e\vec{j},b\vec{j})\text{ - }\vec{A}(e\vec{j},c\vec{k})\\ &\quad\text{-}\vec{A}(f\vec{k},a\vec{i})\text{ - }\vec{A}(f\vec{k},b\vec{j})\text{ - }\vec{A}(f\vec{k},c\vec{k})\\ &\overset{4.9}{=}\text{-}da\vec{A}(\vec{i},\vec{i})\text{ - }db\vec{A}(\vec{i},\vec{j})\text{ - }dc\vec{A}(\vec{i},\vec{k})\\ &\quad\text{-}ea\vec{A}(\vec{j},\vec{i})\text{ - }eb\vec{A}(\vec{j},\vec{j})\text{ - }ec\vec{A}(\vec{j},\vec{k})\\ &\quad\text{-}fa\vec{A}(\vec{k},\vec{i})\text{ - }fb\vec{A}(\vec{k},\vec{j})\text{ - }fc\vec{A}(\vec{k},\vec{k})\\ &\overset{u15}{=}\text{-}db\cdot\vec{k}\text{ - }dc\cdot(\text{ - }\vec{j})\text{ - }ea\cdot(\text{ - }\vec{k})\text{ - }ec\cdot\vec{i}\text{ - }fa\cdot\vec{j}\text{ - }fb\cdot(\text{ - }\vec{i})\\ &=\text{-}db\vec{k}+dc\vec{j}+ea\vec{k}\text{ - }ec\vec{i}\text{ - }fa\vec{j}+fb\vec{i}\\ &=(fb\text{ - }ec)\vec{i}+(dc\text{ - }fa)\vec{j}+(ea\text{ - }db)\vec{k}\end{aligned}$$

27.

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 1 & 4\\ 3 & 4 & 1\end{vmatrix}$$

$$=\left|\begin{array}{ccc|cc} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} & \vec{i} & \vec{j} \\ 2 & 1 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 3 & 4 \end{array}\right.$$

$=1 \cdot 1 \cdot \vec{i} + 4 \cdot 3 \cdot \vec{j} + 2 \cdot 4 \cdot \vec{k}$ - $3 \cdot 1 \cdot \vec{k}$ - $4 \cdot 4 \cdot \vec{i}$ - $1 \cdot 2 \cdot \vec{j}$
$=\vec{i} + 12\vec{j} + 8\vec{k}$ - $3\vec{k}$ - $16\vec{i}$ - $2\vec{j}$
$=$-$15\vec{i} + 10\vec{j} + 5\vec{k}$.

28. Storleken av parallellogrammen är samma som längden av kryssprodukten.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left|\begin{array}{ccc} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 0 & 4 \\ 4 & 4 & 7 \end{array}\right|$$

$$=\left|\begin{array}{ccc|cc} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} & \vec{i} & \vec{j} \\ -2 & 0 & 4 & -2 & 0 \\ 4 & 4 & 7 & 4 & 4 \end{array}\right.$$

$=0 \cdot 7 \cdot \vec{i} + 4 \cdot 4 \cdot \vec{j} + (-2) \cdot 4 \cdot \vec{k}$ - $4 \cdot 0 \cdot \vec{k}$ - $4 \cdot 4 \cdot \vec{i}$ - $7 \cdot (-2) \cdot \vec{j}$
$=0\vec{i} + 16\vec{j} + (-8)\vec{k}$ - $0\vec{k}$ - $16\vec{i}$ - $(-14)\vec{j}$
$=$-$16\vec{i} + 30\vec{j}$-$8\vec{k}$.

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{(-16)^2 + 30^2 + (-8)^2} = \sqrt{1220} \approx 34,9$$

Kapitel 6

Diskussion och slutsatser

Kryssprodukten har i läroplaner och i läroböcker haft en liten roll. Den har bara varit en av de många formlerna som studeranden gör uträkningar med. Då matematisk information har en sådan roll, så kan man lätt påstå att det inte leder till bra förståelse. För att förstå sig på kryssprodukten bör man känna till vad som ligger bakom den. Man kan härleda kryssprodukten på olika sätt, men för mig är det naturligast att presentera den med hjälp av parallellogrammer. En parallellogram är en geometrisk figur som är lätt att begripa samt borde vara bekant för en sådan som har den nödvändiga bakgrundskunskapen för att ta itu med kryssprodukten.

Undervisningspaketet som är gjort utgående från härledningen är ett förslag på hur man kunde jobba med kryssprodukten. Den är uppbyggd med målet att motivera varje steg så man konstruktivt kunde kan bygga upp informationen. Ifall man inte vill jobba med hela paketet, kan man lämna bort avsnittet i planet, och ändå förstå vad som ligger bakom kryssprodukten. Jobbet som görs med parallellogrammer i planet är med för att motivera samt underlätta jobbandet med parallellogrammer i rummet. För den som läser det här arbetet hoppas jag att det väcker nya tankar kring kryssprodukten. Bland annat den tanken att kryssprodukten inte är något svårare än ett sätt att presentera arean för parallellogrammer i rummet.

För att utveckla det här arbetet så kunde man göra ett försök med undervisningspaketet. Man skulle ge undervisningspaketet åt en grupp studeranden som läst vektorkursen i gymnasiet och be dem jobba igenom paketet. Det kunde ge viktig information om hur man kunde förbättra paketet. Det som vore mest intressant för undervisningspaketets del är en inblick på hur studeranden förstår kryssprodukten långsiktigt, men den informationen är svår att få.

Under tiden jag jobbat med den här avhandlingen har jag stiftat bekantskap med interaktiva elektroniska läromedel. Undervisningspaketet är gjort utgående från tanken att en studerande ska bearbeta den med papper och penna. Paketet och lösningarna kan vara på papper eller i elektronisk form. Jag ser nu att undervisningspaketet skulle passa bra som ett avsnitt i ett interaktivt elektroniskt läromedel. Som ingen expert i området antar jag att det vore möjligt att i sådan form kräva svar på uppgifterna och när svaret är givet kommer lösningen fram. Då skulle den som jobbar med paketet få lämpligt den information som uppgiften vill förmedla, även om de inte lyckats med själva uppgiften. Undervisningspaketet i elektronisk form skulle ha en plats som extra material i gymnasiets vektorkurs, ifall läromedlet är interaktivt. Såklart måste man bearbeta materialet och därmed blir det mera jobb för de som gör undervisningsmaterialet. För tryckta böcker tror jag att det är en större kostnadsfråga, om man sätter till så många sidor som det här undervisningspaketet kräver. Det här är inte fördelaktigt då kanske inte alla kommer att jobba med kryssprodukten som har läromedlet.

Litteraturförteckning

[1] Apajalahti, M., Laine, Y. och Tanskanen, R.,(1981): *Lukion matematiikka. 3, Pitkä kurssi.* (3. uppl.) Helsingfors: Otava.

[2] Apajalahti, M., Laine, Y. och Tanskanen, R.,(1984): *Lukion matematiikka. Kurssit 9-11, Laaja oppimäärä* (1. uppl.) Helsingfors : Otava.

[3] Haapasalo, L. (2004): *Pitääkö ymmärtää voidakseen tehdä vai pitääkö tehdä voidakseen ymmärtää.* Ur P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen T. och P. Malinen (red.) Matematiikka - näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti, 2, 50-83.

[4] Halmetoja, M., Häkkinen, K., Merikoski, J., Pippola, L., Silfverberg, H., Tossavainen, T. och Viilo M-L. (2006): *Matematiikan taito. 5, Vektorit*(1.uppl.) Helsingfors: WSOY.

[5] Jokinen, S (2014): *Vektorialgebran koulutus Suomessa.* Pro gradu - avhandling. Informaatiotieeiden yksikkö. Tammerfors: Tampereen yliopisto.

[6] Kangasaho, J., Mäkinen, J., Oikkonen, J., Paasonen, J., Salmela , M. och Tahvanainen, J. (2005): *Pitkä matematiikka 5, Vektorit* (1.uppl.) Helsingfors: WSOY.

[7] Kontkanen, P., Liira, R., Luosto, K., Nurmi, J. Nurmiainen, R., Ronkainen, A. och Savolainen, S. (1998): *Pyramidi : matematiikan tietokirja. 2* (1. uppl.) Helsingfors: Kirjayhtymät.

[8] Kontkanen, P., Liira, R., Luosto, K., Ronkainen, A., Savolainen, S. och Österberg, L. (2008): *Ellips : Lång matematik för gymnasiet. 5, Vektorer* Helsingfors : Schildts

[9] Kouluhallistus. (1981): *Lukion kurssimuotoinen oppimäärä ja oppimääräsuunnitelma, matematiikka.* Helsingfors: Valtion painatuskeskus.

[10] Lahti, U. och Laine, Y. (1989): *Alfa. Lukion laajan matematiikan kurssit 9-11.*(1. uppl.) Helsingfors: Otava.

[11] Lehtosaari, Y. och Leino, J. (1975): *matematiikka 12, lukion laajempi kurssi* (1.-2. uppl.) Helsingfors: Kirjayhtymät.

[12] Lehtosaari, Y,. Leino, J. och Norlamo, P. (1984): *Laaja matematiikka. 3, Kurssit 9-11* Helsingfors: Kirjayhtmä.

[13] Leino, J. (2004): *Konstruktivismi matematiikan opetuksessa.* Ur P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen och P. Malinen (red.) Matematiikka - näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti, 20-31.

[14] Miinala, H., Salimäki, H. och Vuorinen, M(1984): *Uuden lukion matematiikka 3, Laaja oppimäärä* Borgå: WSOY.

[15] Oinas-Kukkonen, H., Merikoski, J., Niva, R. och Keranto, T. (1980): *Matematiikkaa. 12 , Pitkä kurssi.* Åbo: Turun sanomat.

[16] Pehkonen, E. (2011): *Matemaattinen ajattelu ja ymmärtäminen.* Erkki Pehkonen (red.), 11.

[17] Pettofrezzo A.J. (1966) : *Vectors and their applications.* Engelwood Cliffs, New Jersey, USA: Prentice-Hall, Inc.

[18] Piippola, L., Silverberg, H., Viilo, M-L. och Burman, L. (2001): *Trigonomeri och vektorer. Gymnasiematematik, lång kurs*(2. uppl.) Esbo: Schildts.

[19] Piippola, L., Silverberg, H. och Viilo, M-L. (1999): *Matematiikan taito. 4, Trigonometria ja vektorit*(5. uppl.) Borgå: WSOY.

[20] Rajala, S. och Vire, J. (1991): *Lukion laaja matematiikka. Kurssit 9-11.*(1. uppl.) Helsngfors: Otava.

[21] Skolstyrelsen. (1974): *Matematiikan opetussuunnitelmat.* Helsingfors: Statens tryckcentral.

[22] Skolstyrelsen. (1986): *Grunderna för gymnasiets läroplan 1985.* Helsingfors: Statens tryckcentral.

[23] Utbildningsstyrelsen. (1994): *Grunderna för gymnasiets läroplan 1994.* Helsingfors: Tryckericentralen.

[24] Utbildningsstyrelsen. (2004): *Grunderna för gymnasiets läroplan 2003.* Vammala: Vammalan Kirjapaino Oy. Till förfogande:http://www02.oph.fi/svenska/ops/gymnasiet/gymnlpg.pdf (Läst: 22.06.2016).

[25] Utbidlningsstyrelsen. (2016): *Grunderna för gymnasiets läroplan 2015.* Tammerfors: Juvenes Print - Suomen Yliopistopaino Oy. Till förfogande: http://www.oph.fi/download/174853_grunderna_for_gymnasiets_laroplan_2015.pdf (Läst: 22.06.2016).

[26] Väisälä K. (1963): *Vektorianalyysi.* Borgå: WSOY.

[27] Wolff, C.G. (1966): *Lukion vektorilaskenta ja geometria 1.* Helsingfors: Kirjayhtymät.

[28] Wolff, C.G. (1967): *Lukion vektorilaskenta ja geometria 2.* Helsingfors: Kirjayhtymät.